

Chapitre 7. Lois de comportement élastique linéaire – parfaitement plastique.....	2
7.1 Présentation des lois de comportement élastique linéaire – parfaitement plastique.....	2
7.2 Loi de comportement élastique linéaire	4
7.2.1 Modules et coefficient d'élasticité.....	4
7.2.2 Loi de HOOKE.....	6
7.2.3 Décomposition des tenseurs $\underline{\underline{t}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en tenseurs sphériques et déviatoriques.....	7
7.2.4 Déformation plane.....	8
7.2.4.1 Déformation plane en coordonnées cartésiennes.....	8
7.2.4.2 Déformation plane en coordonnées polaires.....	8
7.2.5 Applications aux calculs des tubes épais.....	9
7.2.5.1 Calculs des déplacements et des contraintes dans le cas général	9
7.2.5.2 Cas de la pression intérieure seule P_i	12
7.2.5.3 Cas de la pression extérieure seule P_e	13
7.3 Loi de comportement élastique linéaire parfaitement plastique.....	15
7.3.1 Critère de plasticité de Mohr – Coulomb	15
7.3.2 Détermination de E' , ν' et ψ	19
7.3.3 Critère de plasticité de Tresca	21

Chapitre 7. Lois de comportement élastique linéaire – parfaitement plastique

7.1 Présentation des lois de comportement élastique linéaire – parfaitement plastique

A partir des résultats des essais triaxiaux drainés présentés au chapitre 6, on propose une première modélisation du comportement du sol par une loi **élastique parfaitement plastique**; qui donne la variation du déviateur $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ en fonction de la déformation axiale ε_1 (Fig. 7.1) et l'évolution de la variation volumique $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2 \varepsilon_3$ en fonction de la déformation axiale ε_1 (Fig.7.1).

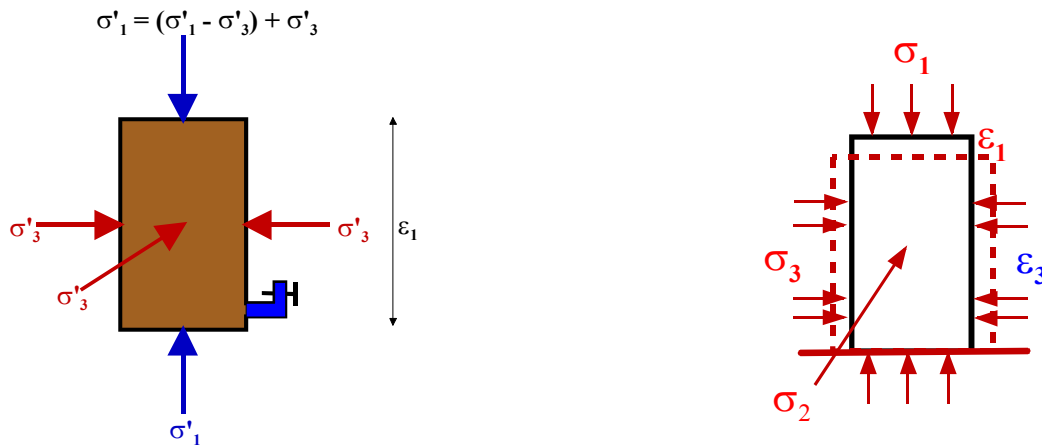


Fig. 7.1 Cisaillement triaxial en compression : contraintes et déformations.

On utilise encore très couramment en géotechnique, la loi **élastique linéaire, parfaitement plastique** avec les critères de **plasticité**, ici de rupture, de **Mohr-Coulomb** et de **Tresca**. La loi de comportement modélise les courbes déviateur et déformation volumique en fonction de la déformation axiale.

Concernant la courbe déviateur- déformation axiale, sous un premier chargement, si la valeur du déviateur q est inférieure à un certain seuil S donné par la loi de plasticité, on considère que le comportement du sol est élastique linéaire (Fig.7.2). Entre les points O et E le déviateur est proportionnel à la déformation axiale $\sigma'_1 - \sigma'_3 = k \cdot \varepsilon_1$. Les chemins de chargement OE et de déchargement EO sont identiques. Dès qu'un point du sol atteint le seuil de plasticité S la déformation tend vers une valeur infinie et suit le chemin EP tant qu'on maintient le déviateur égal à S . Si on procède ensuite, à partir du point P , à un déchargement PO' , le chemin de contraintes au déchargement suit la même pente qu'au chargement, la pente au déchargement est donc identique à la pente de premier chargement. Au déchargement complet il subsiste une déformation permanente plastique ε_p . Ensuite si on opère un rechargement, le chemin de contrainte $O'P$ va suivre la même pente jusqu'au même seuil de plasticité S , la déformation totale étant alors $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e$. Enfin si le déviateur atteint à nouveau S , la déformation totale tend à nouveau vers l'infini.

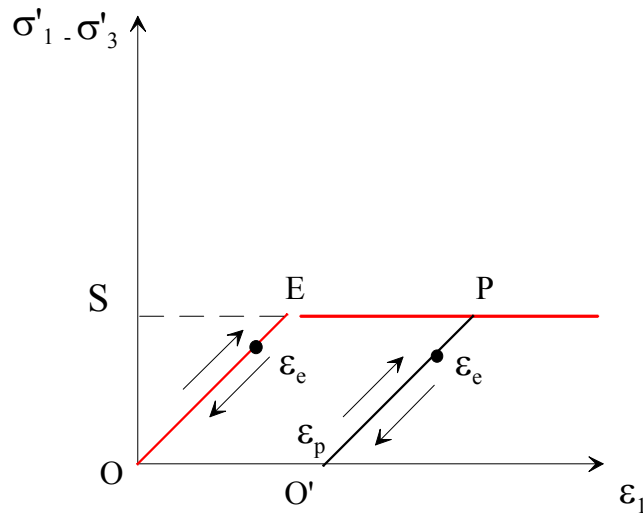


Fig.7.2 Courbes déviateur – déformation axiale pour la loi élastique -linéaire parfaitement plastique

Concernant la courbe déformation volumique – déformation axiale, sous un premier chargement, si la valeur du déviateur q est inférieure à un certain seuil S donné par la loi de plasticité, on considère que le comportement du sol est élastique linéaire (Fig.7.3). Entre les points O et E, le volume de l'échantillon diminue, proportionnellement à la déformation axiale. Quand le déviateur atteint le seuil de plasticité S , suivant l'état initial du sol et la contrainte σ'_3 , le volume de l'échantillon augmente, il se dilate, phénomène de dilatance (Fig. 7.3) ou se contracte, phénomène de contractance (Fig.6.6, 6.7). Pour de grandes déformations, au-delà du point P, par exemple, on atteint l'état critique pour lequel la déformation volumique ne varie plus (Fig.6.6, 6.7 et 7.3)

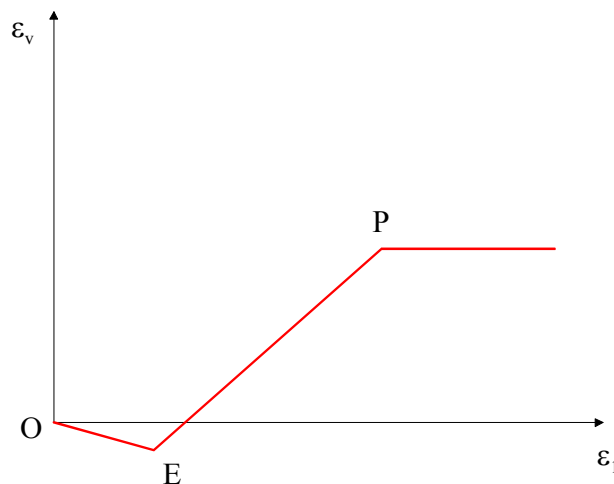


Fig.7.3 Courbes déformation volumique – déformation axiale pour la loi élastique - linéaire parfaitement plastique

On va d'abord étudier le domaine d'élasticité, puis ensuite le domaine de plasticité.

7.2 Loi de comportement élastique linéaire

Le sol aura un comportement élastique si ses déformations sont réversibles, la relation contrainte déformation sera biunivoque, sans qu'elle soit linéaire. Si en plus il existe une relation linéaire entre les contraintes et les déformations on dira que le sol a un comportement élastique linéaire. Ce ne sera généralement pas le cas des sols qui très rapidement, mêmes pour de faibles déformations, ont un comportement élastique non linéaire. Néanmoins les lois de comportement en élasticité linéaire étant bien connues on les utilisera souvent en faisant l'hypothèse forte que la réalité ne s'éloigne pas trop du modèle.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, si le massif de sol est **homogène et isotrope**, on montre en calcul tensoriel que dans ces conditions $\underline{\underline{t}}$ est une fonction linéaire tensorielle isotrope de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Deux coefficients suffisent pour décrire la loi.

$$\underline{\underline{t}} = \lambda (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (7.1)$$

avec $\underline{\underline{1}}$: matrice unité

λ et μ sont les **coefficients de LAME** homogènes à une contrainte.

7.2.1 Modules et coefficient d'élasticité

On définit les modules et le coefficient d'élasticité à partir des essais de compression ou traction simple, de cisaillement et de compression hydrostatique.

7.2.1.1 Compression simple ou traction simple

On définit les modules et les coefficients d'élasticité à partir des essais en compression simple (Fig.7.2) ou en traction simple pour lesquels :

σ_1 est la contrainte principale axiale, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

ε_1 est la dilatation principale axiale, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$

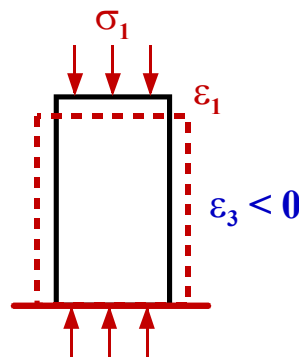


Fig.7.4 Contrainte et déformations de l'essai de compression simple

Sous un effort de compression (traction) simple la contrainte normale σ_1 entraîne une dilatation ε_1 de même signe, raccourcissement (allongement pour la traction) et une dilatation de signe contraire dans la direction perpendiculaire ε_3 , allongement (raccourcissement pour la traction).

La contrainte σ_1 est liée à la dilatation ε_1 par le **module d'élasticité axiale de YOUNG E**, qui a la dimension d'une **contrainte**.

$$\boxed{E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}} \quad (7.2) \quad \text{avec} \quad E = \mu \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \right)$$

Le **coefficient de POISSON** ν est le rapport, en valeur absolue de la dilatation transversale sur la dilatation longitudinale, il est sans dimension.

$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} \quad (7.3) \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

7.2.1.2 Cisaillement simple

On définit le **module de cisaillement de COULOMB** G par le rapport de la contrainte de cisaillement sur la distorsion. G a la dimension d'une contrainte.

$$\boxed{G = \frac{t_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{t_{xy}}{\gamma_{xy}}} \quad (7.4) \quad \text{avec} \quad G = \mu$$

On a la relation suivante entre G , E et ν :

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (7.5)$$

G a les dimensions d'une contrainte.

Comme on verra que $\nu > 0$, G sera toujours **inférieur** à E .

7.2.1.3 Compression hydrostatique

Toutes les facettes supportent la même contrainte normale p négative avec les conventions de la mécanique (elle serait positive avec les conventions de la mécanique des sols). Toutes les directions sont principales.

On utilise la relation 7.1 avec les coefficients de Lamé

$$\underline{\underline{\mathbf{t}}} = \lambda(\underline{\underline{\text{tr}}}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (7.1)$$

On calcule ensuite la trace du tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\text{tr}}}\underline{\underline{\mathbf{t}}} = (3\lambda + 2\mu)\underline{\underline{\text{tr}}}\underline{\underline{\varepsilon}} = -3p$$

puisque la contrainte moyenne p est égale à :

$$p = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

la dilatation cubique est d'après 3.11 :

$$\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\Delta V}{V} < 0$$

donc $3\lambda + 2\mu > 0$

Soit **K** : module de **compression hydrostatique**

$$\boxed{\mathbf{K} = -\frac{p}{\Delta V/V}} \quad (7.6)$$

avec $\mathbf{K} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$

En remplaçant λ et μ par leurs valeurs en fonction de E et ν , on obtient :

$$\boxed{\mathbf{K} = -\frac{p}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1-2\nu)}} \quad (7.7)$$

K est donc positif et $1 - 2\nu > 0$, ce qui entraîne que $\nu < 0.5$.

Le coefficient de POISSON sera toujours compris entre 0 et 0,5.

$$\boxed{0 < \nu < 0.5} \quad (7.8)$$

7.2.2 Loi de HOOKE

Dans le cas de contraintes multiaxiales et en général pour les cas tridimensionnels on établit la loi de Hooke qui sont les équations complètes en élasticité linéaire.

On préférera transformer les équations de LAME en fonction de E et ν pour écrire les équations de **HOOKE**. En tridimensionnel, elles s'expriment par les relations tensorielles suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{t}}} &= \frac{\mathbf{E}}{1+\nu} \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right\} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{\mathbf{E}} \underline{\underline{\mathbf{t}}} - \frac{\nu}{\mathbf{E}} (\text{tr } \underline{\underline{\mathbf{t}}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \end{aligned}} \quad (7.9)$$

Elles permettent de calculer les **6 composantes** des tenseurs de contrainte et de déformation, par exemple en **coordonnées cartésiennes** :

$$\mathbf{t}_{xx} = \frac{\mathbf{E}}{1+\nu} \left\{ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right\}$$

$$\mathbf{t}_{xy} = \frac{\mathbf{E}}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$$

7.2.3 Décomposition des tenseurs $\underline{\underline{t}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en tenseurs sphériques et déviatoriques.

D'après (7.9) on peut écrire :

$$\mathbf{tr} \underline{\underline{t}} = \frac{\mathbf{E}}{1+\nu} \left(\mathbf{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \mathbf{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \right)$$

d'où

$$\mathbf{tr} \underline{\underline{t}} = \frac{\mathbf{E}}{1-2\nu} \mathbf{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$$

et d'après (7.7) :

$$\mathbf{tr} \underline{\underline{t}} = 3\mathbf{K}(\mathbf{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (7.10)$$

On peut décomposer $\underline{\underline{t}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en un tenseur sphérique (contrainte hydrostatique) et un tenseur déviatorique (contrainte déviatorique) dont la trace est nulle donc $\Delta V / V = 0$.

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_v + \underline{\underline{\varepsilon}}_d$ avec $\underline{\underline{\varepsilon}}_v$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$, respectivement tenseur de déformations sphérique et tenseur de déformation déviatorique (chap.3.2.4)

$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}_v + \underline{\underline{t}}_d$ avec $\underline{\underline{t}}_v$ et $\underline{\underline{t}}_d$, respectivement tenseur de contraintes sphérique et tenseur de déformation déviatorique

On a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}}{3} \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}_d$$

$$\underline{\underline{t}} = \frac{\mathbf{tr} \underline{\underline{t}}}{3} \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{t}}_d$$

avec $\mathbf{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}_d$ et $\mathbf{tr} \underline{\underline{t}}_d = 0$

d'où les relations d'après (7.5, 7.9 et 7.10):

$$\boxed{\underline{\underline{t}}_d = 2\mathbf{G} \underline{\underline{\varepsilon}}_d} \quad (7.11)$$

$$\boxed{\underline{\underline{t}}_v = 3\mathbf{K} \underline{\underline{\varepsilon}}_v} \quad (7.12)$$

Les tenseurs sphériques et déviatoriques des contraintes et des déformations sont proportionnels.

7.2.4 Déformation plane

On rappelle que l'élasticité plane concerne les problèmes de déformation plane et les problèmes de contrainte plane. Le **géotechnicien** est principalement intéressé par les problèmes de **déformation plane**.

7.2.4.1 Déformation plane en coordonnées cartésiennes

A partir de l'expression du tenseur de déformation (7.9) et en tenant compte des propriétés de la déformation plane $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$, on déduit que :

$$t_{xz} = t_{yz} = 0.$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \text{ entraîne } t_{zz} = \nu (t_{xx} + t_{yy}).$$

$$\underline{\underline{t}}_{dp} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & 0 \\ t_{yx} & t_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(t_{xx} + t_{yy}) \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

On peut exprimer les contraintes en fonction des déformations et inversement d'après (7.9)

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} \} \\ t_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx} \} \\ t_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)t_{xx} - \nu t_{yy} \} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)t_{yy} - \nu t_{xx} \} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} t_{xy} \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.2.4.2 Déformation plane en coordonnées polaires

Dans les coordonnées polaires on peut écrire de la même façon les contraintes en fonction des déformations et inversement.

$$t_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} \}$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}\} \quad (7.16)$$

$$t_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{r\theta}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E} \{(1-\nu)t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}\}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E} \{(1-\nu)t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}\} \quad (7.17)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} t_{r\theta}$$

7.2.5 Applications aux calculs des tubes épais.

Les démonstrations qui vont suivre sont d'un grand intérêt dans le cadre des travaux souterrains, de la théorie du pressiomètre, des essais triaxiaux, du creusement des puits circulaires...

On considère un tube épais de poids propre négligeable, de section circulaire, soumis à une pression intérieure et à une pression extérieure dans le cas général (Fig.7.5). En supposant que les conditions de chargement sont identiques sur une longueur suffisante on peut faire l'hypothèse qu'on est en déformation plane. D'autre part les chargements sont de révolution. Dans ces conditions de **déformation plane** et de **chargement de révolution** on a vu que les équations des déformations en fonction des déplacements, les équations d'équilibre, les relations entre contraintes et déformations se simplifient notablement.

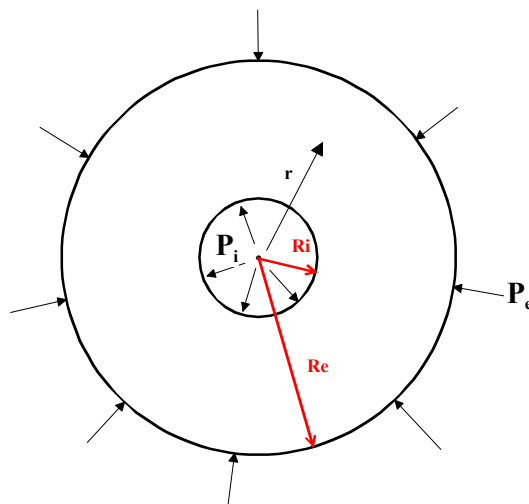


Fig. 7.5 Tube épais soumis à des pressions intérieures et extérieures.

7.2.5.1 Calculs des déplacements et des contraintes dans le cas général

On écrit les équations de **Lamé** (7.9), plutôt que celles de Hooke, pour simplifier l'écriture.

On rappelle que ε_z est nulle puisqu'on est en déformation plane et que les axes r, θ, z sont **principaux**.

$$\underline{\underline{\mathbf{t}}} = \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (7.9)$$

d'où on notant

$t_{rr} = \sigma_r$: contrainte radiale

$t_{\theta\theta} = \sigma_\theta$: contrainte orthoradiale

$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_r$: dilatation radiale

$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_\theta$: dilatation orthoradiale

$$\sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu\varepsilon_r \quad (7.18)$$

$$\sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu\varepsilon_\theta \quad (7.19)$$

En tenant compte des équations 3.12 avec u , le déplacement radial :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (7.20)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (7.21)$$

On injecte (7.18) et (7.19) dans l'équation d'équilibre (4.22)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.22)$$

pour établir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dr} \left[\lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{du}{dr} \right] + 2 \frac{\mu}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = 0$$

Et on obtient

$$r^2 \left(\frac{d^2u}{dr^2} \right) + r \left(\frac{du}{dr} \right) - u = 0 \quad (7.22)$$

qui a comme solutions évidentes

$$u = r$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\boxed{u = Ar + \frac{B}{r}} \quad (7.23)$$

Dans le cas général des tubes épais pour lesquels les *rayons ont des dimensions finies* et les *pressions initiales sont nulles*, on détermine les 2 coefficients A et B en écrivant que σ_r est égal à P_i pour $r = R_i$ et à P_e pour $r = R_e$. (Fig.7.5). on remplace dans les équations 7.18 et 7.19 ε_r et ε_θ en fonction de l'équation 7.28 et des relations 7.18 et 7.19. On obtient tous calculs faits :

$$\sigma_r = 2A\lambda + 2\mu \left(A - \frac{B}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = 2A\lambda + 2\mu \left(A + \frac{B}{r^2} \right)$$

d'où l'on tire les valeurs des 2 constantes A et B.

$$B = \frac{(P_e - P_i)R_i^2 R_e^2}{2\mu(R_e^2 - R_i^2)}$$

$$A = \frac{(P_e R_e^2) - (P_i R_i^2)}{2(\lambda + \mu)(R_e^2 - R_i^2)}$$

Qui donne la solution générale pour les contraintes et le déplacement :

$\sigma_r = \frac{P_e R_e^2 \left(1 - \frac{R_i^2}{r^2} \right) - P_i R_i^2 \left(1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right)}{R_e^2 - R_i^2} \quad (7.24)$
$\sigma_\theta = \frac{P_e R_e^2 \left(1 + \frac{R_i^2}{r^2} \right) - P_i R_i^2 \left(1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right)}{R_e^2 - R_i^2} \quad (7.25)$

$$u(r) = \frac{P_e R_e^2 - P_i R_i^2}{2(\lambda + \mu)(R_e^2 - R_i^2)} r + \frac{(P_e - P_i)R_e^2 R_i^2}{2\mu(R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r}$$

En tenant compte des relations entre le module de Young E et le coefficient de Poisson ν avec les coefficients de Lamé :

$\mathbf{u}(r) = \frac{(1+\nu)}{E} \left[(1-2\nu) \frac{P_e R_e^2 - P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{(P_e - P_i)R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{1}{r} \right] \quad (7.26)$

7.2.5.2 Cas de la pression intérieure seule P_i

D'après (7.24) et (7.25) on établit directement :

$$\sigma_r = - \left(\frac{P_i R_i^2 \left(1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right)}{R_e^2 - R_i^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = - \left(\frac{P_i R_i^2 \left(1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right)}{R_e^2 - R_i^2} \right)$$

On détermine la contrainte orthoradiale pour $r = R_i$ et $r = R_e$

$$\sigma_{\theta(r=R_i)} = - \frac{P_i (R_e^2 + R_i^2)}{R_e^2 - R_i^2} \quad (7.27)$$

$$\sigma_{\theta(r=R_e)} = - \frac{2P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (7.28)$$

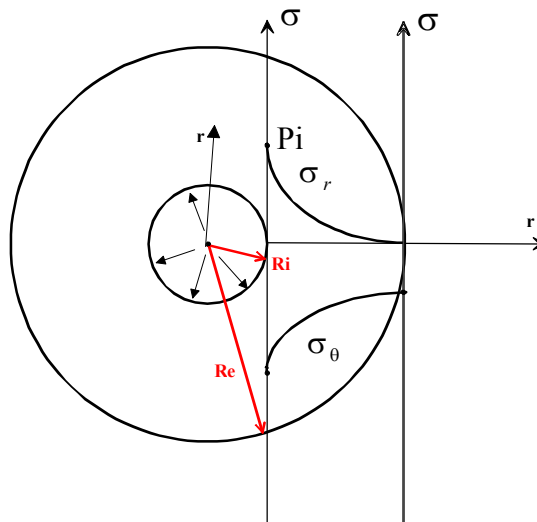


Fig.7.6 Répartition des contraintes dans un tube épais soumis à P_i

On constate que σ_r et σ_θ sont de **signes contraires**. Si la pression intérieure est une pression, σ_r est une **compression** et σ_θ une **traction** (Fig. 7.6).

La valeur absolue de σ_θ est maximum pour $r = R_i$ et est supérieure à la valeur absolue de la pression appliquée à l'intérieur du tube.

7.2.5.3 Cas de la pression extérieure seule P_e

D'après (7.24) et (7.25) on établit directement :

$$\sigma_r = \frac{P_e R_e^2 \left(1 - \frac{R_i^2}{r^2}\right)}{R_e^2 - R_i^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_e R_e^2 \left(1 + \frac{R_i^2}{r^2}\right)}{R_e^2 - R_i^2}$$

On détermine la contrainte orthoradiale pour $r = R_i$ et $r = R_e$

$$\sigma_{\theta(r=R_i)} = \frac{2P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (7.29)$$

$$\sigma_{\theta(r=R_e)} = \frac{P_e (R_e^2 + R_i^2)}{R_e^2 - R_i^2} \quad (7.30)$$

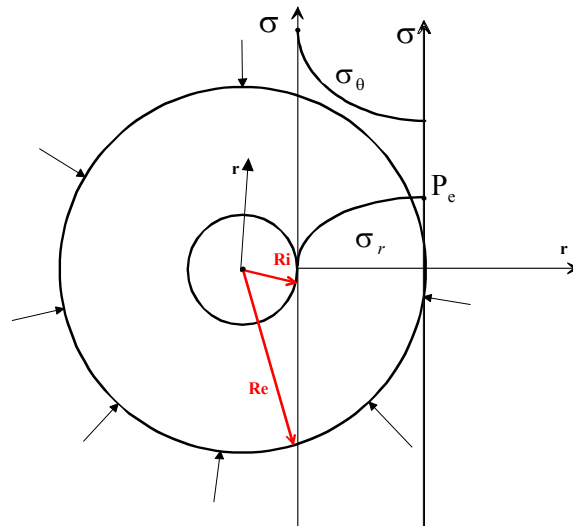


Fig7.7 Répartition des contraintes dans un tube épais soumis à une pression extérieure P_e .

On constate que σ_r et σ_θ sont de **même signe**. Si la pression extérieure est une compression (cas des tunnels, des puits, des forages, par exemple) σ_r et σ_θ sont des **compressions** (Fig.7.7).

La valeur absolue de σ_θ est maximum pour $r = R_i$, elle est minimum pour $r = R_e$ et supérieure à la valeur absolue de la pression extérieure P_e .

7.3 Loi de comportement élastique linéaire parfaitement plastique

7.3.1 Critère de plasticité de Mohr – Coulomb

Le modèle élastique linéaire parfaitement plastique avec critère de plasticité de Mohr – Coulomb est encore le modèle le plus utilisé dans la pratique courante de la géotechnique, en principe seulement pour les chemins monotones (sans cycles de chargement – déchargement), pour les sols grenus (sable et gravier) et le comportement drainé, à long terme, des sols fins saturés (limon et argile). On étudie d'abord le critère de plasticité qui permettra de définir ensuite le domaine d'élasticité.

Il se caractérise, pour le modèle complet, élastique – parfaitement plastique par une élasticité linéaire isotrope (E' , ν') et un seuil de plasticité S (Fig.7.8) tel que

$$(\sigma'_1 - \sigma'_3) = 2\cos\varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin\varphi' \quad (7.31)$$

Si $(\sigma'_1 - \sigma'_3) < 2\cos\varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin\varphi'$, le sol est dans le domaine **élastique** ;

Si $(\sigma'_1 - \sigma'_3) = 2\cos\varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin\varphi'$, le sol est dans le domaine **plastique** ;

Il est **impossible** que $(\sigma'_1 - \sigma'_3) > 2\cos\varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin\varphi'$.

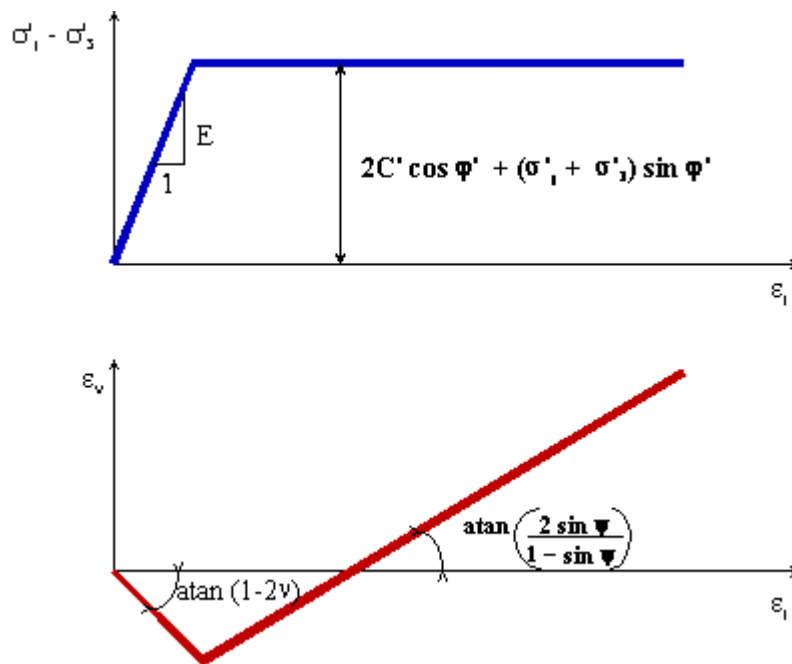


Fig.7.8 Caractéristiques de la loi élastique-linéaire parfaitement plastique.

Critère de rupture Mohr-Coulomb

La contrainte principale intermédiaire σ'_2 ne joue aucun rôle.

φ' , C' , ψ ont les définitions suivantes

φ' : angle de frottement interne du sol, correspond à un frottement solide dans un squelette de grains ou de particules.

C' : cohésion entre les particules fines du sol, « colle » entre les particules qui existe sous certaines conditions

ψ : l'angle de dilatance du sol, il représente l'augmentation de volume du squelette du sol qui se produit pendant le cisaillement du sol (Fig.6.6 et 6.7), le contraire est la contractance

Les valeurs de φ' et C' sont calculées dans les axes de Mohr, Cambridge ou Lambe.

7.3.1.1 Détermination de φ' et C' dans les axes de Mohr

Les courbes déviateur ($\sigma'_1 - \sigma'_3$) en fonction de la déformation axiale ε_1 (Fig.6.6) permettent de déterminer le déviateur à la rupture, soit au pic, soit pour une déformation donnée, soit à l'état critique.

Si on soumet plusieurs échantillons de sol, à des contraintes de confinement σ'_3 différentes, jusqu'au critère de rupture, les enveloppes des différents cercles de Mohr, à la rupture, sont, en première approximation, 2 droites symétriques (Fig.7.9)

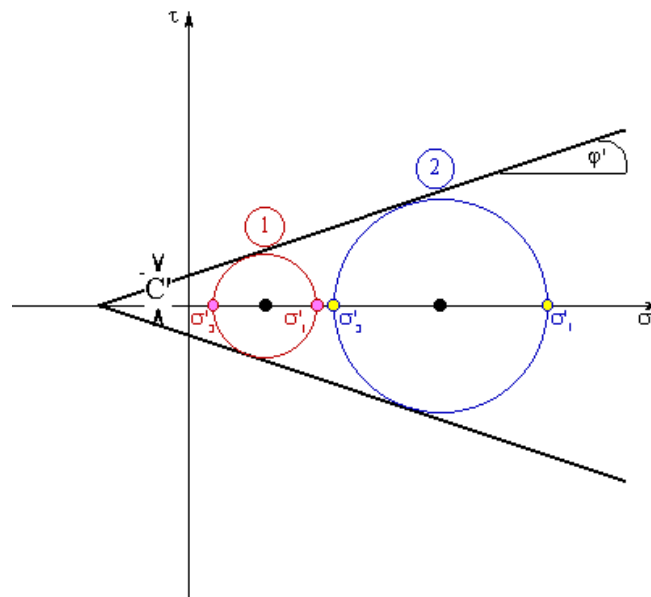


Fig.7.9 Droites de rupture de Mohr-Coulomb

Le critère de plasticité de **Coulomb** dans les **axes de Mohr** s'exprime donc par la formule générale :

$$\tau = C' + \sigma' \tan \varphi' \quad (7.32)$$

Le critère de plasticité de **Coulomb** couplé au postulat de **Terzaghi** donne :

$$\tau = C' + (\sigma - u) \tan \varphi' \quad (7.33)$$

7.3.1.2 Détermination de φ' et C' dans les axes de Cambridge

Si l'enveloppe d'une famille de cercles de Mohr est une droite, le lieu des points représentatifs de ces états de contraintes est également une droite dans le plan p, q (Fig.7.10).

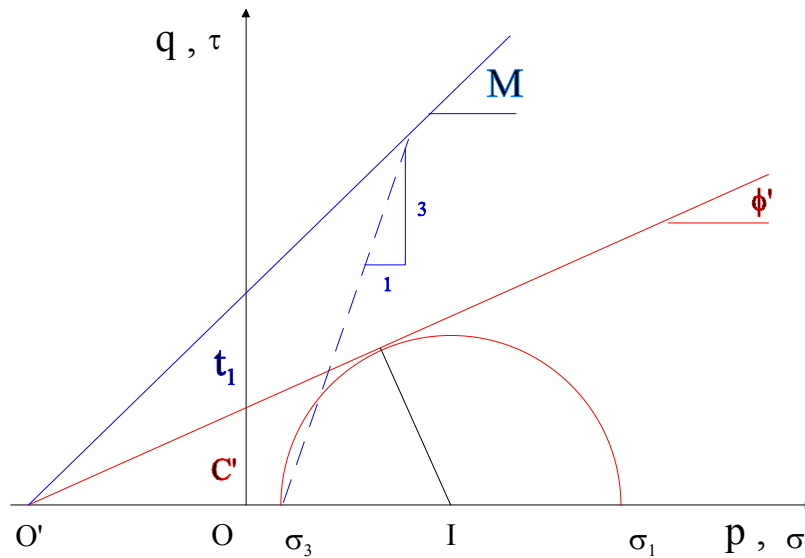


Fig.7.10 Correspondance entre la droite de rupture dans les axes de Mohr et dans les axes de Cambridge

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = O'I \sin \varphi$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = q = (\sigma_1 + \sigma_3 + 2H) \sin \varphi$$

$$q = \left(2p + \frac{q}{3} \right) \sin \varphi + 2c \cos \varphi$$

$$q = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} p + \frac{6c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}$$

$$\boxed{\mathbf{q} = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'} \mathbf{p}' + \frac{6C' \cos \varphi'}{3 - \sin \varphi'} = \mathbf{M} \mathbf{p}' + \mathbf{t}_1} \quad (7.34)$$

La pente M et l'ordonnée à l'origine de la droite de rupture t_1 dans le chemin de contraintes de Cambridge, p' , q , permettent de déduire l'angle de frottement interne φ' et la cohésion C' définis dans les axes de Mohr-Coulomb.

7.3.1.3 Détermination de φ' et C' dans les axes de Lambe

La figure 7.11 représente deux enveloppes pour le même cercle de Mohr. Les coordonnées s' et t coïncident avec les coordonnées σ' et τ .

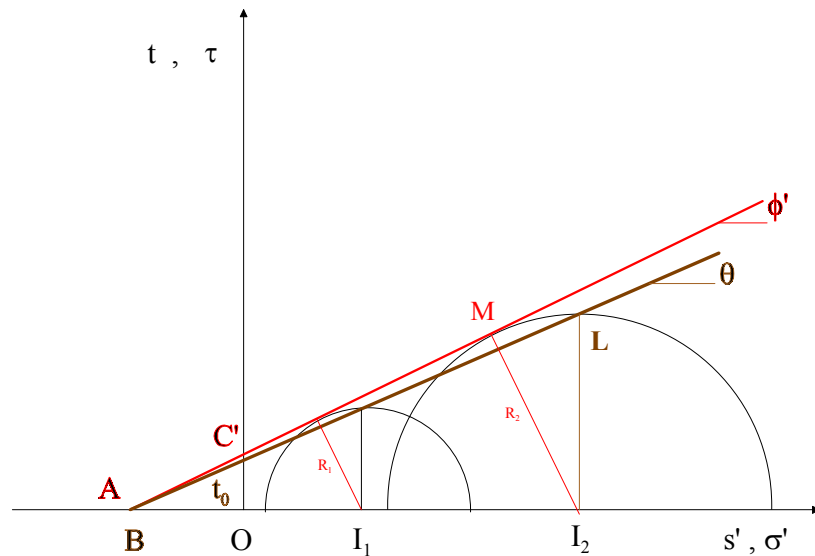


Fig.7.11 Correspondance entre la droite de rupture dans les axes de Mohr et dans les axes de Lambe

La droite de rupture dans les axes de Mohr tangente le cercle au point M , la droite de rupture dans les axes de Lambe passe par le sommet du cercle L . Des considérations élémentaires montrent que les deux droites interceptent les axes σ' et s' au même point A . On en déduit :

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = \left(\sigma'_1 + \sigma'_3 + 2H \right) \sin\varphi'$$

$$t = s' \cdot \sin\varphi' + C \cdot \cos\varphi'$$

On a $t = s' \cdot \tan\theta + t_0$ (7.35)

Avec (7.36):

$$\sin\varphi' = \tan\theta$$

$$C' = \frac{t_0}{\cos\varphi'}$$

L'intérêt de tracer les chemins de contrainte s', t est de pouvoir obtenir une droite par régression linéaire, procédure plus simple que de tracer la tangente à plusieurs cercles de Mohr.

7.3.2 Détermination de E', ν' et ψ

Le seuil de plasticité ayant été défini on détermine les paramètres des relations entre le déviateur et la déformation volumique en fonction de la déformation axiale (Fig.7.12) dans le domaine élastique. On complète par la détermination de l'angle de dilatance ψ dans le domaine plastique qui permet d'obtenir une courbe complète de la déformation volumique en fonction de la déformation axiale (Fig.7.12).

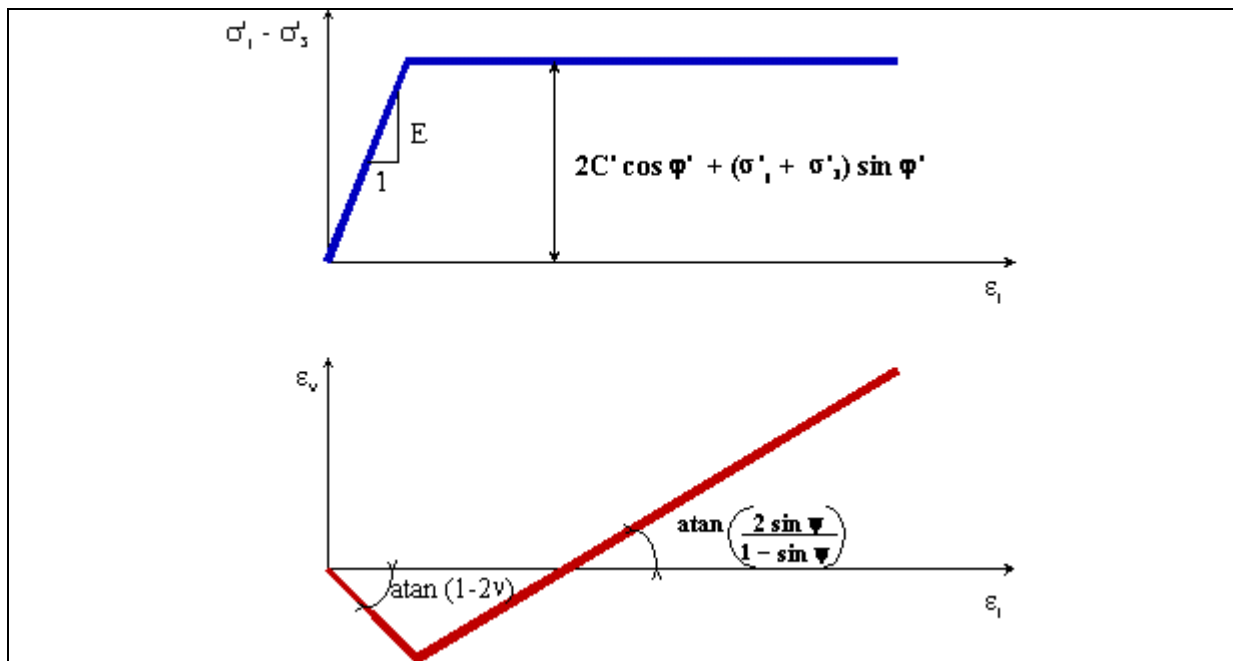


Fig.7.12 Caractéristiques de la loi élastique-linéaire parfaitement plastique.
Critère de rupture Mohr-Coulomb

7.3.2.1 Détermination du module de Young E'

Il suffit d'appliquer la loi d'élasticité linéaire en considérant que dans l'essai triaxial :

$$d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 \text{ et } d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$$

En appliquant l'équation (7.9) on obtient :

$$d\sigma_1 - d\sigma_3 = E' d\varepsilon_1 \quad (7.37)$$

La figure 7.12 montre sur la courbe déviateur $\sigma'_1 - \sigma'_3$ en fonction de la déformation axiale ε_1 , comment déterminer le module de Young E' .

En fait la détermination d'un module E' , réaliste, est une opération très délicate, l'élasticité étant rapidement non linéaire même pour de faibles déformations.

En réalité le module de Young E' diminue quand la déformation augmente et augmente avec la contrainte de confinement σ'_3 .

7.3.2.2 Détermination du coefficient de Poisson ν'

Il suffit d'appliquer la loi d'élasticité linéaire en considérant que dans l'essai triaxial :

$$d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 \text{ et } d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$$

En appliquant l'équation (7.9) on obtient:

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = 1 - 2\nu' \quad (7.38)$$

La figure 7.12 indique à partir de l'enregistrement de la variation de volume de l'échantillon ε_v en fonction de la déformation axiale ε_1 comment déterminer le coefficient de Poisson ν .

7.3.2.3 Détermination de l'angle de dilatance

Pour calculer l'angle de dilatance ψ , on montre que le rapport de la variation volumique plastique de l'échantillon de sol $d\varepsilon_v^p$ sur la variation de la déformation verticale $d\varepsilon_1^p$ est égal à :

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{-2 \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (7.39)$$

La figure 7.12 indique à partir de l'enregistrement de la variation de volume de l'échantillon ε_v en fonction de la déformation axiale ε_1 l'angle de dilatance ψ qui caractérise l'augmentation de volume du sol pendant le cisaillement..

La **dilatance** est fonction évidemment de la **compacité** du sol mais également de la **contrainte** moyenne p' .

Pour une contrainte moyenne donnée la dilatance sera d'autant plus forte que la compacité des sols grenus ou la surconsolidation des sols fins sera forte. Mais la dilatance dépend également de la contrainte moyenne, à compacité ou surconsolidation initiale égale la dilatance diminuera avec l'augmentation de la contrainte moyenne. Ainsi un sable lâche peut être dilatant sous faibles contraintes et un sable compact contractant (diminution de volume) sous fortes contraintes, on en verra une application très significative dans le calcul des murs en Terre Armée®.

Pour les ouvrages courants Vermeer a proposé une règle simple, pour les sols grenus, qui ne dépend que de l'angle de frottement φ' , en proposant $\psi = \varphi' - 30^\circ$.

Les significations de ces différents paramètres seront précisées et discutées dans le chapitre « essais de laboratoire », mais dès à présent il est nécessaire d'indiquer que les paramètres φ et C n'ont pas de signification si on ne précise pas la nature du sol, son état de saturation, son type de chargement.

& Application

La figure 7.13 modélise le comportement d'un sable par la loi élastique linéaire parfaitement plastique avec critère de plasticité de Mohr- Coumob

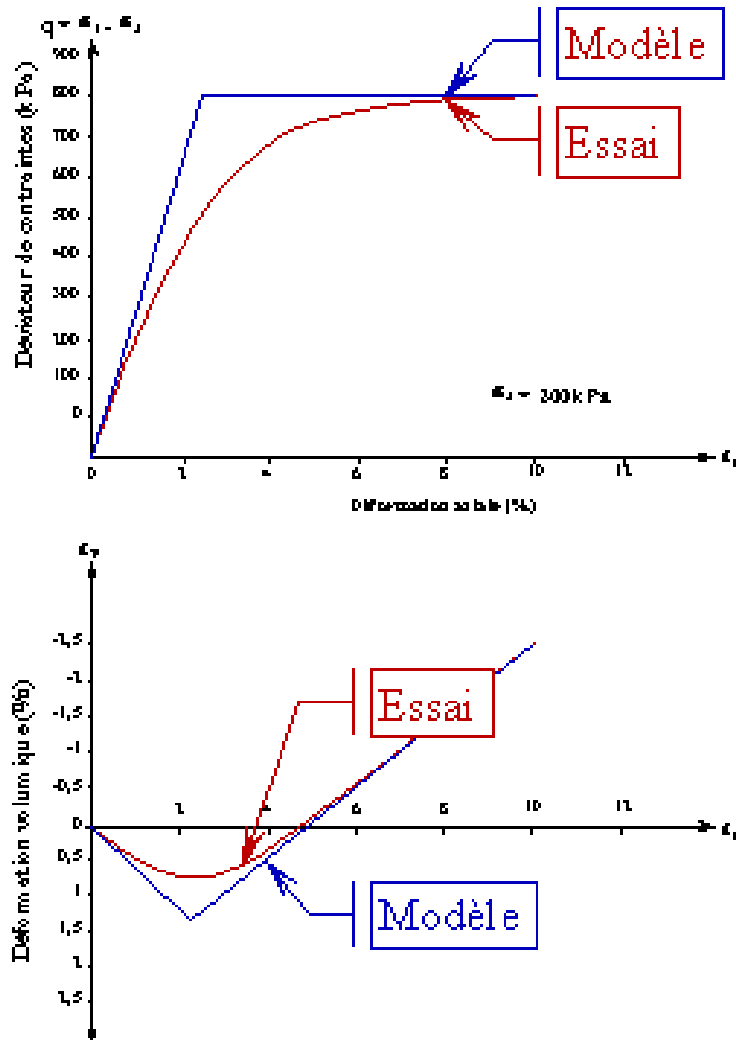


Fig. 7.13 Modélisation de l'essai triaxial drainé sur un sable par la loi élastique - linéaire parfaitement plastique avec critère de rupture de Mohr-Coulomb)

7.3.3 Critère de plasticité de Tresca

Ce modèle est utilisé pour l'étude des **sols fins** (argile , limon) **saturés, non drainés**, soumis à des sollicitations brèves, en **contraintes totales à court terme**, durant lesquelles la variation de volume est nulle.

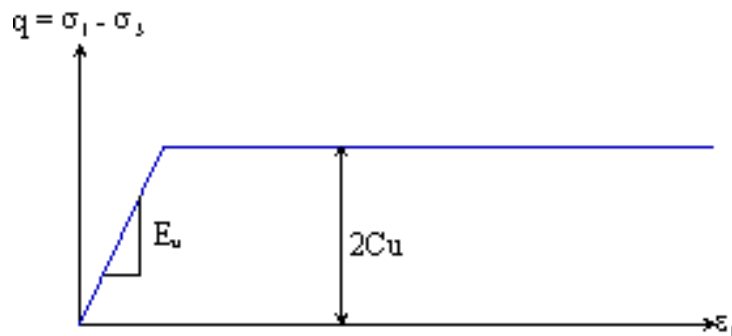
Il se caractérise pour le modèle complet par une élasticité linéaire isotrope (E_u, ν_u), et un seuil de plasticité S tel que (Fig.7.14).

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 C_u \quad (7.40)$$

Si $(\sigma_1 - \sigma_3) < 2 C_u$, le sol est dans le domaine **élastique** ;

Si $(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 C_u$, le sol est dans le domaine **plastique** ;

Il est **impossible** que $(\sigma_1 - \sigma_3) > 2 C_u$.



*Fig.7.14 Caractéristiques de la loi élastique-linéaire parfaitement plastique
Critère de rupture de Tresca*

$\varphi_u = 0$ et C_u ont les définitions suivantes

$\varphi_u = 0$: angle de frottement , à court terme, d'un **sol fin saturé**

C_u , cohésion à court terme, d'un **sol fin saturé**.

Ces deux caractéristiques d'un sol fin saturé à court terme sont donc des **valeurs transitoires** qui ne sont valables qu'**à court terme**. Elles ont été introduites pour faciliter les calculs, en particulier en phase de chantier, la connaissance des contraintes effectives étant plus difficiles à calculer tout au long de la consolidation du massif de sol fin saturé. On gardera à l'esprit que dès le début de la consolidation on s'éloigne de ces hypothèses de court terme , d'autant plus évidemment si le sol n'est pas très imperméable.

Les courbes déviateur $(\sigma_1 - \sigma_3)$ en fonction de la déformation axiale ϵ_1 (Fig.6.7) permettent de déterminer le déviateur à la rupture, soit au pic, soit pour une déformation donnée, soit à l'état critique.

Si on soumet plusieurs échantillons de sol, à des contraintes de confinement σ'_3 différentes, jusqu'au critère de rupture, les enveloppes des différents cercles de Mohr, à la rupture, sont, en première approximation, 2 droites symétriques (Fig.7.9)

Si on soumet plusieurs échantillons de sol, **sans consolidation préalable**, à des contraintes de confinement σ_3 différentes jusqu'à la rupture de chaque éprouvette (Fig.7.15), on obtient des déviateurs q à la rupture tous identiques, la résistance de tous les échantillons étant la même puisqu'ils n'ont pas été consolidés. Les enveloppes des différents cercles de Mohr, à la rupture, sont 2 droites de rupture parallèles à l'axe des contraintes normales σ .

Le critère de Tresca dans les axes de Mohr s'exprime donc par

$\tau = C_u$ (7.41)

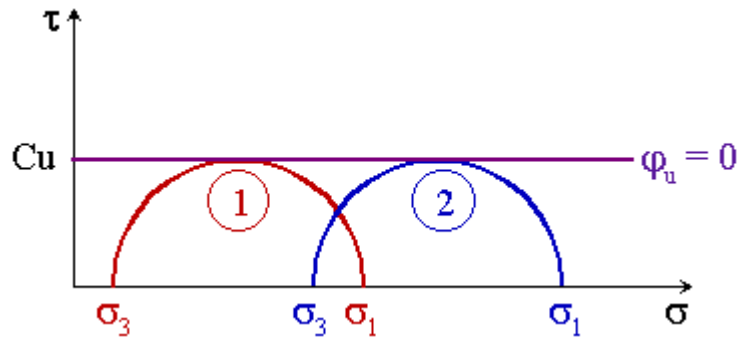


Fig.7.15 Critère de rupture de TRESCA (Argile saturée non drainée)

On peut également déterminer le module de Young et le coefficient de Poisson non drainés. Puisque $\varepsilon_v = 0$ le coefficient de Poisson ν est égal à **0,5** (d'après 7.7) et on peut calculer E_u , module de Young non drainé en fonction du module de Young drainé E' , en écrivant que le module de cisaillement de Coulomb est le même dans les deux cas $\tau = \tau' = G\gamma$.

$$G_u = G' = \frac{E'}{2(1+\nu')} = \frac{E_u}{2(1+\nu_u)}$$

$$E_u = E' \frac{(1+\nu_u)}{(1+\nu')}$$

$$\boxed{E_u = E' \frac{(1+\nu_u)}{(1+\nu')}} \quad (7.42)$$

Le module de Young non drainé E_u sera donc toujours plus élevé que le module de Young drainé E' .