

Chapitre 4. Les contraintes dans les sols.....	2
4.1 Notion de contrainte. Définition du vecteur contrainte	2
4.1.1 Vecteur contrainte.....	2
4.1.1 Contraintes orthogonales en un point.....	4
4.1.2 Tenseurs des contraintes en coordonnées cartésiennes	4
4.1.3 Contraintes et directions principales du tenseur de contraintes	7
4.1.4 Décomposition du tenseur de contraintes en partie sphérique et déviatorique	10
4.1.5 Généralités sur la représentation géométrique du tenseur de contraintes	10
4.1.6 Représentation géométrique du tenseur de contraintes dans les axes fixes principaux X_1, X_2, X_3 . Représentation de Lamé.	10
4.1.7 Représentation géométrique du tenseur de contraintes dans les axes liés σ, τ . Représentation de Mohr	11
4.2 Equations d'équilibre	16
4.2.1 Equations d'équilibre en coordonnées cartésiennes.....	16
4.2.2 Equations d'équilibre en coordonnées cylindriques. Déformation plane et axisymétrie.....	20
4.3 Equations surfaciques	22

Chapitre 4. Les contraintes dans les sols

4.1 Notion de contrainte. Définition du vecteur contrainte

4.1.1 Vecteur contrainte

Les différentes actions externes appliquées à un domaine quelconque de sol S sont (Fig.4.1) :

- Les forces de volume F_v ;
- Les forces de surface F_s ;

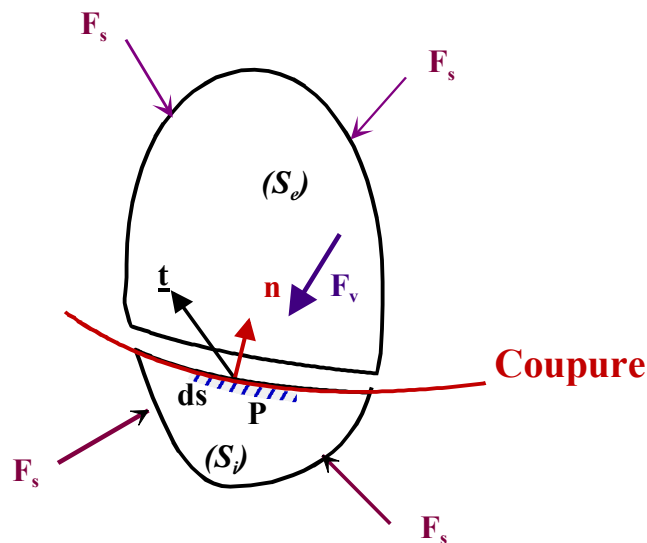


Fig.4.1 Domaine quelconque coupé en 2 parties

Pour mettre en évidence les petites forces internes df on fait une coupure qui sépare la partie restante S_e de la partie enlevée S_i qu'on isole.

L'ensemble des torseurs des actions de S_e sur S_i et de S_i sur S_e , représente un système d'actions internes au domaine S . Le principe de l'action et de la réaction indique que ces 2 torseurs sont opposés. Si on considère un point P appartenant à S_i et une petite surface dS , appelée facette, entourant P , les forces internes de contact de S_e sur S_i admettent une résultante générale \overline{df} et un moment résultant \overline{dC} .

Si $dS \rightarrow 0$ on admet que $\frac{\overline{df}}{dS}$ tend vers une limite appelée contrainte \underline{t} en ce point P et que

$$\frac{\overline{dC}}{dS} \rightarrow 0.$$

Une contrainte a donc la dimension d'une force divisée par une surface. Inversement la petite force df qui s'applique sur la facette dS est égale à la contrainte constante et uniformément répartie t multipliée par cette petite surface dS .

La contrainte s'exprime en $\text{Pa} = \text{N} / \text{m}^2$ et ses multiples kPa et MPa .

Si on prend l'exemple du massif de sol chargé par une semelle filante (Fig.4.2) on a :

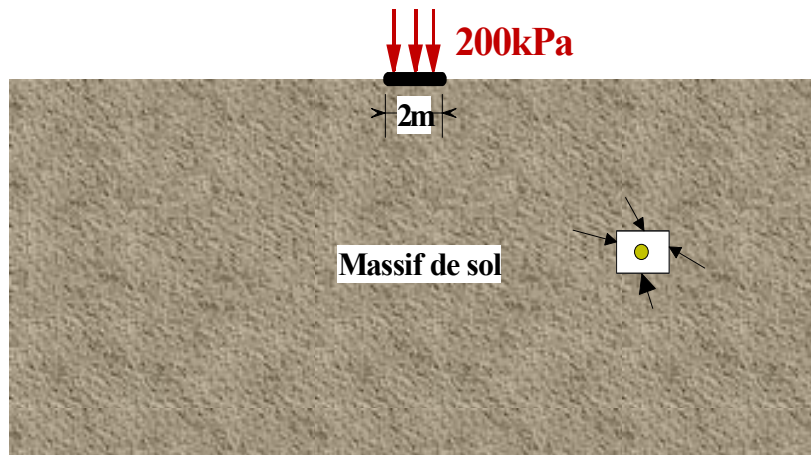


Fig.4.2 Forces appliquées au massif de sol

- ♣ Forces de volume : action de la pesanteur, poids de la terre ;
- ♣ Forces de surface : contraintes de 200 kPa et réactions d'appui aux limites du modèle ;
- ♣ Petites forces internes df dues à l'ensemble du massif de sol S_e sur les faces du petit parallélépipède S_i ($dx dy dz$.)

On a défini \underline{t} , le vecteur contrainte en P appartenant à dS , \underline{t} varie suivant le point P et suivant la facette considérée dS .

On décompose \underline{t} suivant la normale à la facette et dans le plan de la facette (Fig.4.3) :

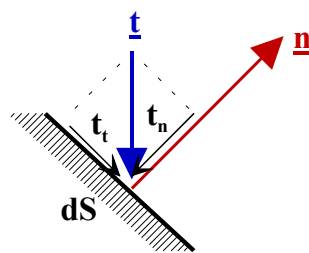


Fig.4.3 Décomposition de la contrainte sur la facette

- ♣ t_n suivant la *normale à la facette*, est la *contrainte normale*, qu'on notera σ en **mécanique des sols**. Si elle est orientée suivant la normale sortante de la facette, on aura une traction, au contraire si elle est rentrante, on aura une compression. Par convention on comptera les *compressions positives* et les *tractions négatives* en *mécanique des sols (MS)* et le contraire en *mécanique des milieux continus (MMC)* et dans les logiciels de calcul. Il est fondamental de bien distinguer les compressions des tractions, les sols ne supportant pas ou très peu les contraintes de traction.

- ♣ t_t suivant le *plan de la facette*, est la *contrainte de cisaillement*, qu'on notera τ en *mécanique des sols*.

4.1.1 Contraintes orthogonales en un point

En un point P, les facettes peuvent prendre n'importe quelle orientation ; les contraintes correspondantes constituent le **faisceau de contraintes en ce point**. Parmi ces facettes on considère les 3 facettes orthogonales aux 3 axes P_x , P_y , P_z d'un trièdre orthonormé. Pour chacune de ces facettes on aura (Fig.4.4):

- ✓ 1 contrainte normale ;
- ✓ 2 contraintes de cisaillement.

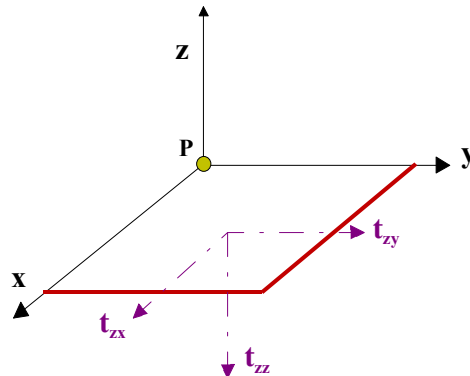


Fig.4.4 Décomposition de la contrainte sur la facette Z

Chaque facette est repérée par l'indice correspondant à sa normale. Chaque composante de la contrainte est désignée par l'indice de l'axe parallèle à sa direction. Chaque contrainte sera donc désignée par t_{ij} . Par exemple, par rapport à la facette z, orientée par la normale n_z , la contrainte normale est t_{zz} , les 2 contraintes de cisaillement sont t_{zx} et t_{zy} .

4.1.2 Tenseurs des contraintes en coordonnées cartésiennes

On considère le tétraèdre élémentaire $PM_xM_yM_z$ (Fig.4.5), extrait, par exemple du massif de sol de la figure 4.2 dont on écrit l'équilibre en négligeant les forces volumiques du 3^{ème} ordre par rapport aux forces de contact internes du 2^{ème} ordre. On a :

$$PM_x = dx$$

$$PM_y = dy$$

$$PM_z = dz$$

Et on note la facette inclinée $M_xM_yM_z = dS$. Sur cette facette orientée par son vecteur normal sortant \underline{n} , s'exerce la contrainte $\underline{t}(t_x, t_y, t_z)$.

Les résultantes des contraintes sur chaque facette sont appliquées au centre d'inertie.

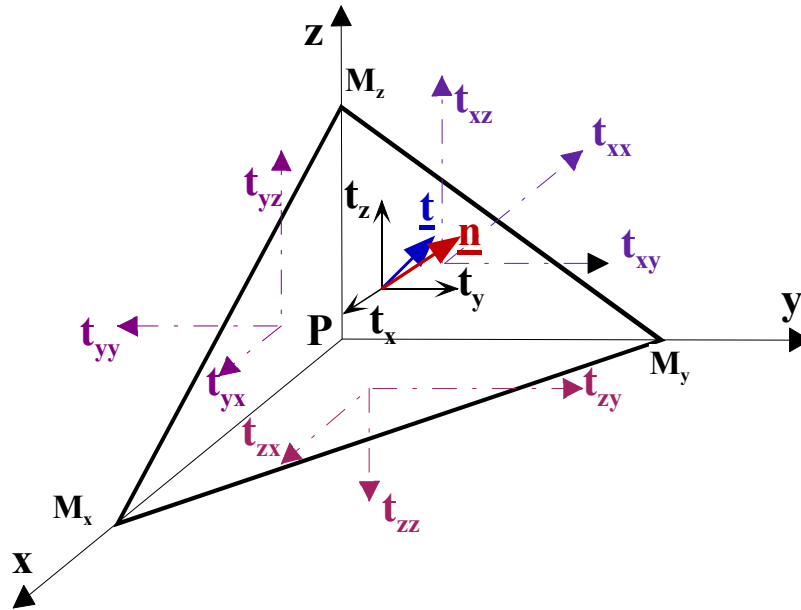


Fig.4.5 Répartition des contraintes sur le tétraèdre élémentaire

Sur l'axe x, l'équilibre des forces élémentaires s'écrit :

$$t_x \cdot dS = \frac{1}{2}(t_{xx} \cdot dy \cdot dz) + \frac{1}{2}(t_{yx} \cdot dx \cdot dz) + \frac{1}{2}(t_{zx} \cdot dx \cdot dy)$$

En exprimant toutes les surfaces élémentaires en fonction de dS et des composantes du vecteur normal \underline{n} qui oriente la facette dS , on aura :

$$t_x \cdot dS = (t_{xx} \cdot dS \cdot n_x) + (t_{yx} \cdot dS \cdot n_y) + (t_{zx} \cdot dS \cdot n_z)$$

d'où la relation

$$t_x = t_{xx} \cdot n_x + t_{yx} \cdot n_y + t_{zx} \cdot n_z$$

et les autres relations par permutation circulaire.

Les moments résultants par rapport à chacun des axes passant par les centres d'inertie des facettes et parallèles aux axes sont nuls. Les forces élémentaires rencontrant ou étant parallèles à ces axes donnent des moments élémentaires nuls. Sur chaque facette il ne reste donc que 2 moments élémentaires.

Par exemple, sur la facette z on aura l'équilibre des moments élémentaires (Fig.4.7) :

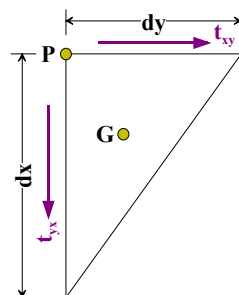


Fig.4.7 Moments élémentaires par rapport à G_z

$$t_{yx} \left(\frac{dx \cdot dz}{2} \right) \times \frac{dy}{3} = t_{xy} \left(\frac{dy \cdot dz}{2} \right) \times \frac{dx}{3}$$

d'où :

- ♣ $t_{yx} = t_{xy}$
- ♣ $t_{yx} = t_{xy}$ convergent ou divergent toutes les deux vers P pour qu'il y ait équilibre de rotation

On a donc réciprocity des contraintes de cisaillement : $t_{ij} = t_{ji}$

Sur 2 éléments infiniment petits orthogonaux s'exercent simultanément 2 contraintes de cisaillement. Les 2 contraintes convergent ou divergent vers l'arête commune aux 2 facettes (Fig.4.8).

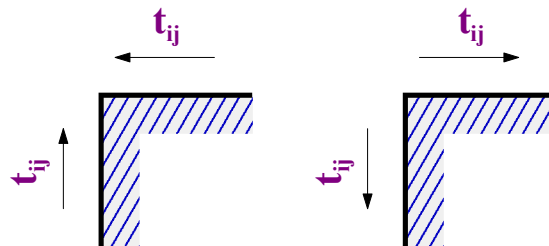


Fig.4.8 Représentation des contraintes de cisaillement sur 2 facettes orthogonales

Le tétraèdre étant infiniment petit, on peut considérer que dS , la facette oblique, passe par P. Le faisceau de contraintes est donc défini par 9 composantes, se réduisant à 6 par réciprocity des contraintes de cisaillement.

On aura donc au point P, en coordonnées cartésiennes

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{t}(P, \underline{n}) = \underline{t} \times \underline{n}} \quad (4.1)$$

D'où la matrice du tenseur des contraintes, au point P, en coordonnées cartésiennes dans laquelle comme on l'a vu en 4.1.1 chaque contrainte est désignée par t_{ij} :

$$\underline{t} = \begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

:

Par exemple, le programme de calcul PLAXIS 7.2[®], donne au point la matrice du tenseur de contraintes suivante :

$$\begin{pmatrix} -2,86 & 2,66 & 0 \\ 2,66 & -4,79 & 0 \\ 0 & 0 & -2,3 \end{pmatrix} \text{ kPa}$$

la signification des composantes de la matrice est indiquée sur la figure 4.9

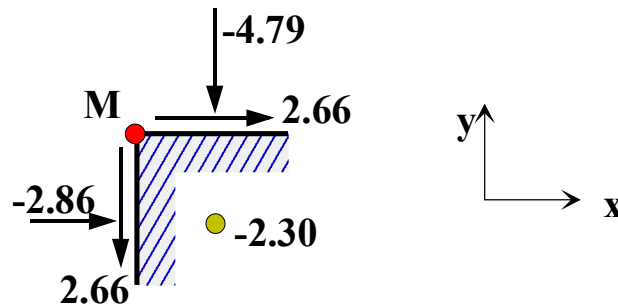


Fig.4.9 Représentation des contraintes sur les 3 facettes

La contrainte normale s'obtient en projetant le vecteur contrainte sur la normale à la facette. Il suffit donc de faire le produit scalaire de \underline{t} par \underline{n} .

$$\boxed{t_n = \underline{n} \times \underline{t} \times \underline{n}} \quad (4.3)$$

en explicitant

$$t_n = (n_x, n_y, n_z) \begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$t_t^2 = t^2 - t_n^2$$

avec

$$t^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$$

4.1.3 Contraintes et directions principales du tenseur de contraintes

\underline{t} étant un tenseur du second ordre, symétrique, comme pour le tenseur de déformation il existe une base propre X_1, X_2, X_3 , dans laquelle la matrice du tenseur est diagonale. Cette base constitue les directions principales au point P considéré. Les contraintes correspondantes sont les contraintes normales principales t_1, t_2, t_3 dans le cas tridimensionnel.

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Les facettes correspondant aux 3 directions principales ne subissent donc aucune contrainte de cisaillement. Dans une base quelconque les valeurs propres de (\underline{t}) s'obtiennent par l'équation en S (déterminant) qui fournit les trois contraintes principales t_1, t_2, t_3 .

$$\begin{vmatrix} t_{xx} - S & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} - S & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} - S \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

On classe les contraintes principales suivant $t_1 > t_2 > t_3$

Avec :

t_1 : contrainte principale majeure

t_2 : contrainte principale intermédiaire

t_3 : contrainte principale mineure

Ces 3 contraintes principales ne dépendent que de l'état de contraintes au point étudié, indépendante évidemment du repère choisi. On détermine trois invariants comme pour les déformations.

$$t_1 + t_2 + t_3 = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = \text{tr}(\underline{t}) = I_1$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = t_{xx} t_{yy} + t_{yy} t_{zz} + t_{zz} t_{xx} - t_{xy}^2 - t_{yz}^2 - t_{zx}^2 = I_2 \quad (4.6)$$

$$t_1 t_2 t_3 = t_{xx} t_{yy} t_{zz} - t_{xx} t_{yz}^2 - t_{yy} t_{zx}^2 - t_{zz} t_{xy}^2 + 2 t_{xy} t_{yz} t_{zx} = I_3$$

Les trois vecteurs propres s'obtiennent de la même manière que pour les déformations.

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Avec, puisque la base est orthonormée :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_3 = \underline{n_1} \wedge \underline{n_2}$$

Dans le cas de **déformation plane**, si c'est la direction Pz qui est principale, les cisaillements $t_{xz}, t_{zx}, t_{yz}, t_{zy}$ sont nuls. Par contre la contrainte t_{zz} , à la différence de la déformation ε_{zz} n'est pas nulle, elle reste constante quand les facettes tournent dans la plan Pxy autour de l'axe Pz.

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & 0 \\ t_{yx} & t_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & t_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Puisque t_{zz} est constant on pourra travailler sur le tenseur réduit à trois composantes:

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

et on calculera l'équation en S suivante

$$\begin{vmatrix} t_{xx} - S & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} - S \end{vmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

$$(t_{xx} - S)(t_{yy} - S) - (t_{xy})^2 = 0$$

qui donne t_1 et t_2

$t_1 > t_2$ et $t_z = \text{constante}$, contrainte principale.

(Le classement des contraintes principales sera différent suivant la convention de signes adoptée : contrainte de compression positive et contrainte de traction négative en mécanique des sols, le contraire en mécanique des milieux continus et dans les logiciels de calcul).

La direction \mathbf{z} est, par définition de la déformation plane, **principale**, ce peut être dans le cas le plus général \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 ou \mathbf{X}_3 .

On calcule les 2 autres directions principales(en supposant t_z , la mineure, la démonstration restant la même dans un autre cas)

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\begin{pmatrix} t_{xx}n_1 + t_{xy}n_2 \\ t_{yx}n_1 + t_{yy}n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1n_1 \\ t_2n_2 \end{pmatrix}$$

Soit, par exemple pour la direction majeure :

$$(t_{xx} - t_1)n_1 + t_{xy}n_2 = 0$$

D'où n_1 et n_2 et la direction majeure \mathbf{X}_1 .

Il n'est pas obligatoire de normer les vecteurs si l'on veut seulement calculer l'angle de rotation.

Puisque l'on connaît la direction principale $n_z = 0$, on obtient directement la troisième direction principale \mathbf{X}_2 , dans le plan xy , orthogonale à \mathbf{X}_1 .

4.1.4 Décomposition du tenseur de contraintes en partie sphérique et déviatorique

On peut décomposer $\underline{\underline{t}}$ en un tenseur sphérique (contrainte hydrostatique) et un tenseur déviatorique :

$$\underline{\underline{t}}_{(s)} = \frac{1}{3} \{ \text{tr } \underline{\underline{t}} \} \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} t_m & 0 & 0 \\ 0 & t_m & 0 \\ 0 & 0 & t_m \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$\underline{\underline{1}}$: matrice unité

avec $t_m = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{t}}) = \frac{I_1}{3}$: contrainte moyenne, sphérique, hydrostatique, qui est un invariant.

$$\underline{\underline{t}}_{(d)} = \underline{\underline{t}} - \frac{1}{3} \{ \text{tr } \underline{\underline{t}} \} \underline{\underline{1}} \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} t_{xx} - t_m & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} - t_m & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} - t_m \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{t}}$ et $\underline{\underline{t}}_{(d)}$ ont mêmes directions principales. Le déviateur est seul responsable du cisaillement puisque le vecteur contrainte du tenseur sphérique est constamment normal à n'importe quelle facette

4.1.5 Généralités sur la représentation géométrique du tenseur de contraintes

S'agissant d'un tenseur symétrique comme le tenseur de déformation les démonstrations seront semblables. Cependant étant donné l'importance de la représentation géométrique du tenseur de contraintes nous précisons son utilisation dans les paragraphes suivants.

4.1.6 Représentation géométrique du tenseur de contraintes dans les axes fixes principaux X_1, X_2, X_3 . Représentation de Lamé.

En chaque point P, la facette peut prendre n'importe quelle orientation repérée par sa normale \underline{n} . Le vecteur \underline{n} décrit donc une sphère.

Dans la base propre X_1, X_2, X_3

$$t_x = n_1 \times t_1 \quad n_1 = \frac{t_x}{t_1}$$

et $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

d'où
$$\frac{t_x^2}{t_1^2} + \frac{t_y^2}{t_2^2} + \frac{t_z^2}{t_3^2} = 1 \quad (4.14)$$

L'extrémité du vecteur contrainte \underline{t} dans la base fixe, décrit, pour un problème tridimensionnel, l'ellipsoïde de Lamé de demi axes ayant pour valeurs les 3 contraintes principales t_1, t_2, t_3 .

Dans un problème bidimensionnel, l'extrémité du vecteur **contrainte** \underline{t} décrit évidemment une ellipse de lamé de demi-axes ayant pour valeur deux contraintes principales, généralement t_1 et t_3 .

4.1.7 Représentation géométrique du tenseur de contraintes dans les axes liés σ, τ . Représentation de Mohr

Le vecteur contrainte est reporté à 2 axes liés à la facette, axe \underline{n} normal à la facette et axe \underline{n}' orthogonal à \underline{n} dans le plan de la facette, repérés dans le plan des axes fixes principaux X_1, X_2, X_3 de la base propre.

On obtient, évidemment, les mêmes relations que pour le tenseur des déformations avec

$$t_n = \sigma$$

$$t_t = \tau$$

$$t_n = n_1^2 t_1 + n_2^2 t_2 + n_3^2 t_3$$

$$t^2 = t_n^2 + t_t^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Si $t_1 \neq t_2 \neq t_3$, la résolution donne :

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{t_t^2 + (t_n - t_2)(t_n - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \geq 0 \\ n_2^2 &= \frac{t_t^2 + (t_n - t_3)(t_n - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \geq 0 \\ n_3^2 &= \frac{t_t^2 + (t_n - t_1)(t_n - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

En posant $t_1 > t_2 > t_3$ on met en évidence que l'extrémité du vecteur contrainte \underline{t} se trouve à l'extérieur des cercles principaux d'extrémités t_1, t_2 et t_2, t_3 et à l'intérieur du cercle d'extrémités t_1, t_3 appelé cercle de Mohr (Fig.4.10). **On notera que si une des composantes du vecteur propre \underline{n} est nulle, l'extrémité du vecteur contrainte se déplace sur un des cercles.** C'est une propriété très pratique qu'on utilisera très souvent dans les problèmes de mécanique des sols, puisque, généralement on pourra considérer qu'on a des problèmes bidimensionnels (déformation plane) pour lesquels $n_z = 0$. Si la contrainte t_{zz} , principale, est la contrainte intermédiaire, l'extrémité du vecteur contrainte se déplace alors sur le plus grand cercle appelé cercle de Mohr.

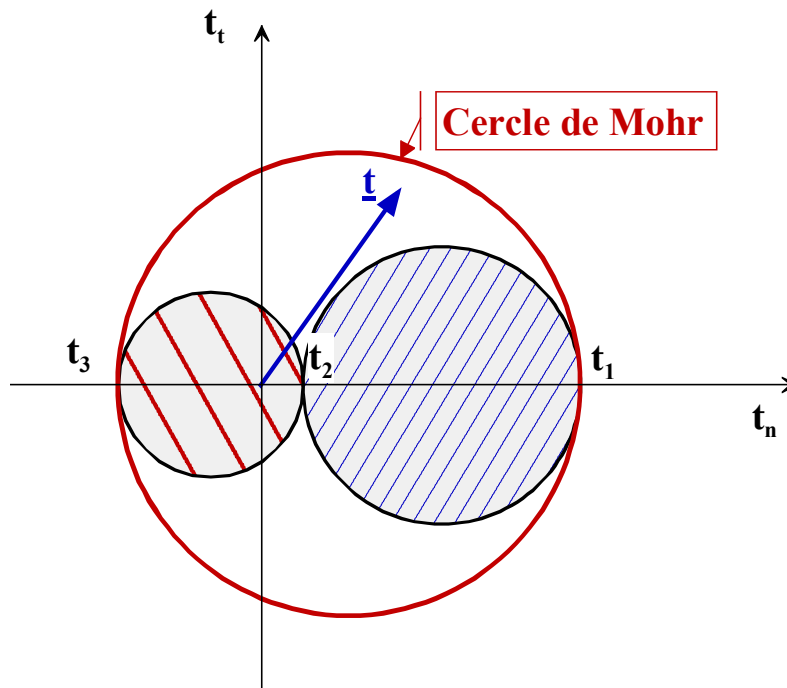


Fig.4.10 Représentation de Mohr de l'état de contraintes

♣ *Application au cas de contrainte biaxiale (cas bidimensionnel)*

On se place dans les axes principaux X_1 et X_2 , en étudiant les contraintes appliquées à la facette dS , orientée par \underline{n} , qui tourne autour du troisième axe principal $X_3 = 0$ (Fig.4.11).

On étudie l'équilibre du prisme, de section PAB, d'épaisseur unité.

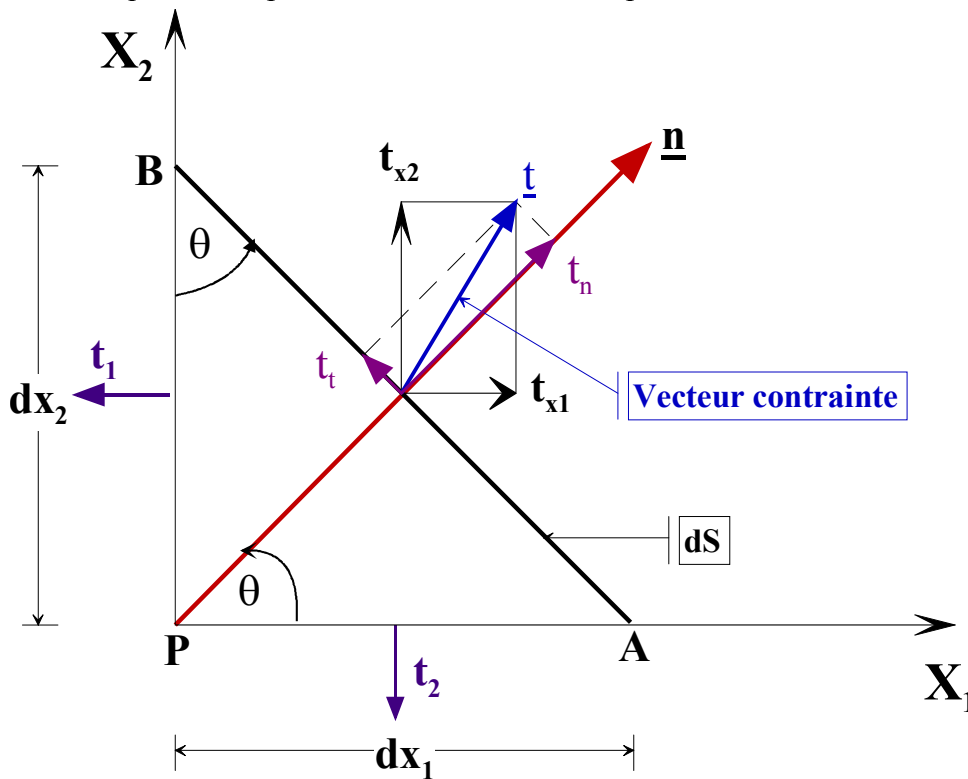


Fig. 4.11 Equilibre du prisme PAB

On note t_1 et t_2 les contraintes principales

t_{x1} et t_{x2} les composantes de la contrainte \underline{t} dans les axes fixes X_1 et X_2

t_n et t_t les composantes de la contrainte \underline{t} dans les axes liés n et n' Equilibre des forces internes élémentaires dans les axes fixes X_1 et X_2

$$t_1 dx_2 = t_{x1} dS = t_1 dS \cos\theta$$

$$t_2 dx_1 = t_{x2} dS = t_2 dS \sin\theta$$

$$t_{x1} = t_1 \cos\theta$$

$$t_{x2} = t_2 \sin\theta$$

d'où :

$$\frac{t_{x1}^2}{t_1^2} + \frac{t_{x2}^2}{t_2^2} = 1$$

L'extrémité du vecteur contrainte décrit dans les axes fixes, l'ellipse de demi-axes t_1 et t_2 (Fig.4.12).

Equilibre des forces internes élémentaires dans les axes liés à la facette

Il suffit d'appliquer la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} t_n \\ t_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{x1} \\ t_{x2} \end{pmatrix}$$

$$t_n = t_1 \cos^2\theta + t_2 \sin^2\theta$$

$$t_t = -t_1 \sin\theta \cos\theta + t_2 \sin\theta \cos\theta$$

d'où en passant à l'arc double

$t_n = \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} \cos 2\theta$ $t_t = \frac{t_1 - t_2}{2} \sin(-2\theta)$	(4.16)
---	--------

L'extrémité du vecteur contrainte \underline{t} décrit dans les axes liés, le cercle principal de centre $(t_1 + t_2)/2$ et de rayon $(t_1 - t_2)/2$. Quand la facette tourne de θ dans les axes fixes, l'extrémité du vecteur contrainte tourne de -2θ sur le cercle principal (sur un cercle principal, pour n_1 ou $n_3 = 0$, sur le cercle de Mohr, pour $n_2 = 0$, direction principale intermédiaire).

La figure 4.12 indique les déplacements de l'*extrémité* du vecteur contrainte dans les axes fixes et dans les axes liés.

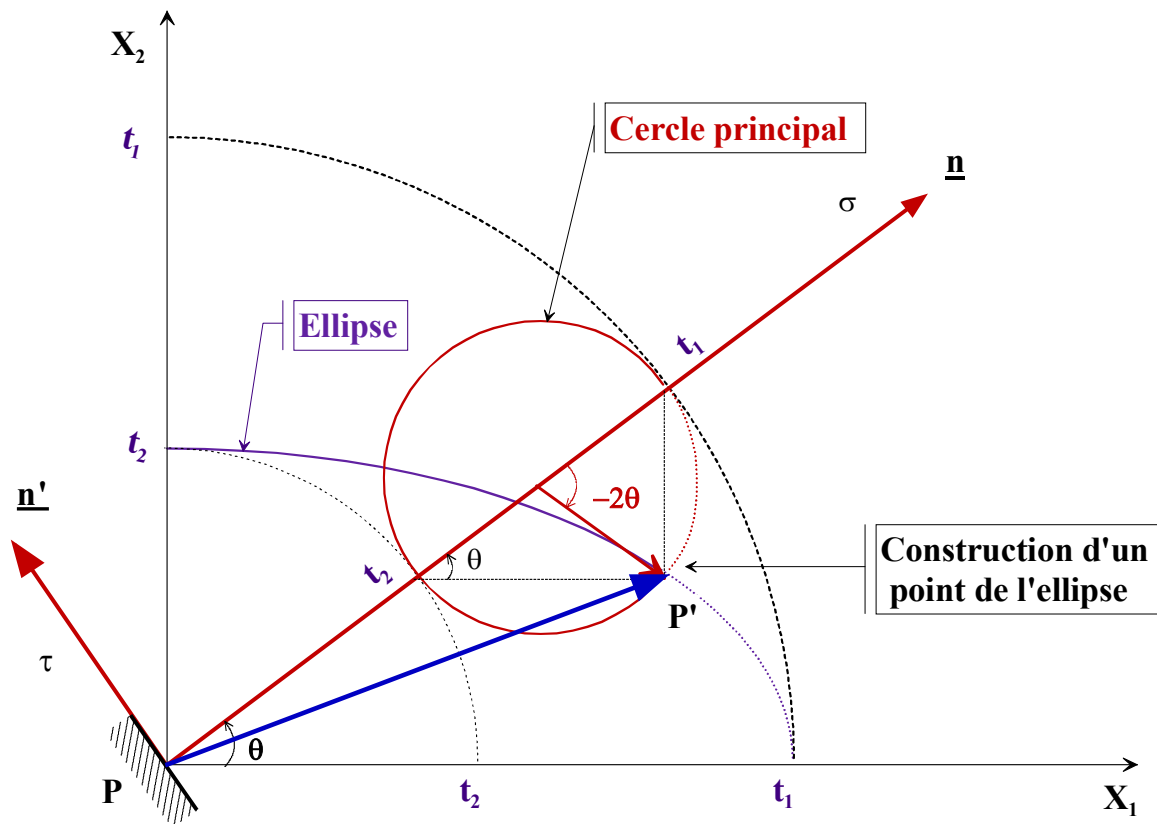


Fig.4.12 Représentations du vecteur contrainte dans les axes fixes de Lamé et dans les axes liés de Mohr

La figure 4.13 montre les déplacements de l'extrémité du vecteur contrainte PP' sur le cercle principal. Le vecteur contrainte PP' porté par la facette principale majeure, ici verticale, a son extrémité en t_1 (Fig.4.13a). Le vecteur contrainte PP' porté par la facette qui a tourné de θ par rapport à la direction principale majeure a son extrémité qui a tourné de -2θ entre t_1 et P' (Fig.4.13b), la facette n'est plus principale il y a à la fois une contrainte normale et une contrainte de cisaillement. Enfin quand la facette a tourné de $\pi/2$ on se retrouve sur la facette principale intermédiaire, ici horizontale, le vecteur contrainte PP' a son extrémité en t_2 (Fig.4.13c).

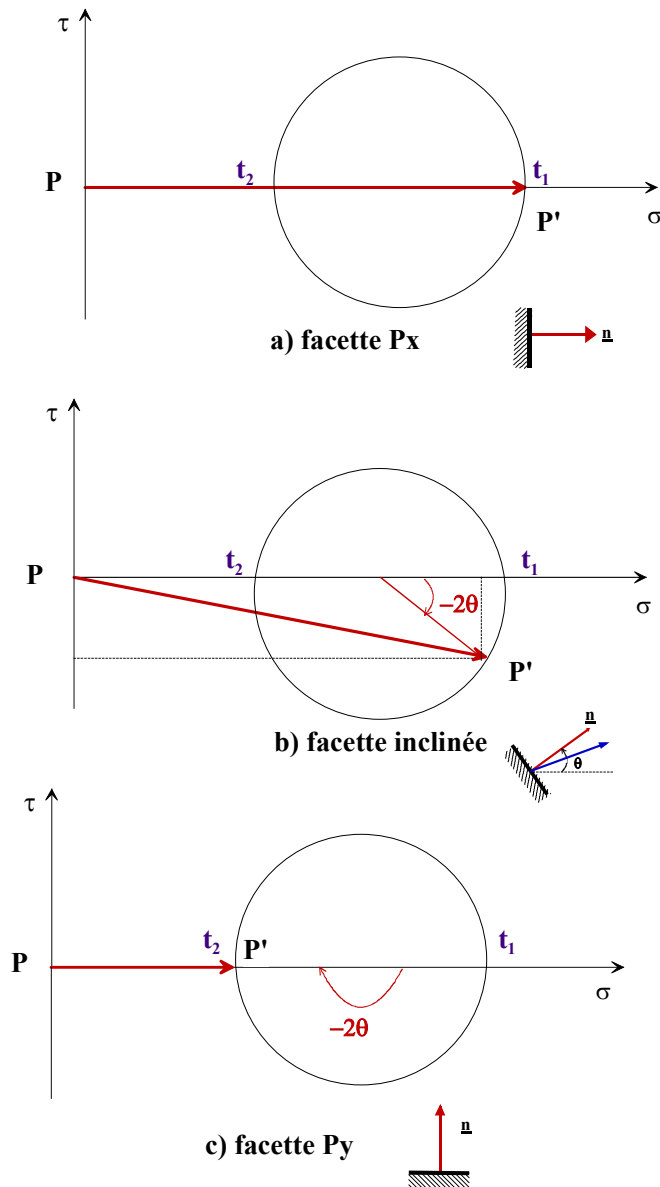


Fig.4.13 . Lieu de l'extrémité d'un vecteur contrainte en fonction de l'orientation de la facette

Connaissant le tenseur des contraintes biaxiales (n_1, n_2 ou $n_3 = 0$), on peut inversement tracer le cercle de Mohr ou le cercle principal.

Le centre du cercle est connu : $(t_1 + t_2) / 2$, puisque $t_1 + t_2 = t_{xx} + t_{yy} = 1^{\text{er}}$ invariant. Les deux facettes étant orthogonales les 2 extrémités des vecteurs contraintes t_{xx}, t_{xy} et t_{yy}, t_{yx} sont diamétralement opposées. On peut donc tracer le cercle et en déduire les contraintes principales et les directions principales.

Si on adopte les conventions de la *mécanique des milieux continus* les contraintes de traction sont positives et les contraintes de *compression* sont *négatives*.

Les cisaillements n'ayant pas de signe il faut savoir dans quel ordre les porter. On peut montrer qu'on doit porter t_{ij} avec le signe positif et t_{ji} avec le signe négatif à condition de prendre (i,j) dans le sens direct (i,j,k) . Par exemple dans les axes (x,y) , on portera t_{xx}, t_{xy} avec le signe positif pour la contrainte de cisaillement et t_{yy}, t_{yx} avec le signe négatif pour la contrainte de cisaillement. Ce serait le contraire dans les axes (z,x) , on porterait t_{zz}, t_{zx} avec le signe positif pour la contrainte de cisaillement et t_{xx}, t_{xz} avec le signe négatif pour la contrainte de cisaillement.

Si l'on adopte les *conventions* habituelles de la *mécanique des sols*, les signes des contraintes normales sont opposés, les contraintes de *compression* sont *positives, par contre* les signes des contraintes de cisaillement sont inchangés. Dans ces conditions, quand la facette tourne de θ dans les axes fixes, l'extrémité du vecteur contrainte tourne de $+2\theta$ sur le cercle de Mohr ou sur un cercle principal.

4.2 Equations d'équilibre

4.2.1 Equations d'équilibre en coordonnées cartésiennes

4.2.1.1 Déformation plane

On peut écrire, par exemple, les équations d'équilibre statique pour le massif de sol chargé par la semelle filante (Fig.4.2).

Pour établir les équations d'équilibre, on isole un parallélépipède infiniment petit dx, dy d'épaisseur unitaire (Fig.4.18). Etant infiniment petit, il est soumis à :

- ☆ des contraintes surfaciques uniformes normales et tangentielles sur les quatre côtés et à une contrainte constante seulement normale sur la facette orientée par z ;
- ☆ des forces massiques, dans le cas traité seulement la force massique de pesanteur $\gamma = \rho g$.

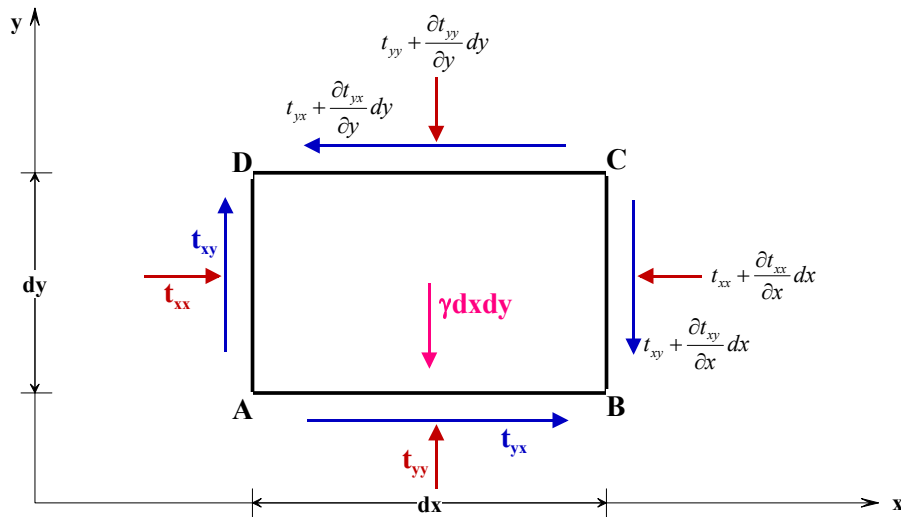


Fig.4.18 Forces élémentaires appliquées au parallélépipède

On écrit les projections des forces élémentaires sur les axes x et y, en rappelant que $t_{xy} = t_{yx}$.

Projection des **forces élémentaires** sur l'axe des x

$$t_{xx}dy + t_{yx}dx - \left(t_{xx} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} dx \right) dy - \left(t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

Projection des **forces élémentaires** sur l'axe des y

$$t_{xy}dy + t_{yy}dx - \left(t_{xy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(t_{yy} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} dy \right) dx + \gamma dxdy = 0$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \gamma = 0 \quad (4.18)$$

en prenant γ avec son signe (par exemple $\gamma = \rho g = -20 \text{ kN/m}^3$)

Tensoriellement on peut généraliser l'expression précédente en écrivant

$$\boxed{\text{div} \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{F}} = 0 \quad (4.19)}$$

$\underline{\underline{t}}$: tenseur des contraintes

$\underline{\underline{F}}$: vecteur des forces massiques (le plus souvent la force de pesanteur ρg)

On peut retrouver, d'autre part, en utilisant l'équation des moments que $t_{ij} = t_{ji}$.

La formule (4.19) est la **formule fondamentale** de l'équilibre en mécanique des milieux continus dans le cas de forces statiques. Cette relation très importante s'applique évidemment quelle que soit la loi de comportement

4.2.1.2 Cas tridimensionnel

Explicitement

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

\underline{F} avec son signe, et $t_{ij} = t_{ji}$.

4.2.1.3 Applications au calcul des contraintes dans un massif de sol indéfini à surface horizontale

Ce massif de sol est seulement soumis aux forces de pesanteur (Fig.4.19)

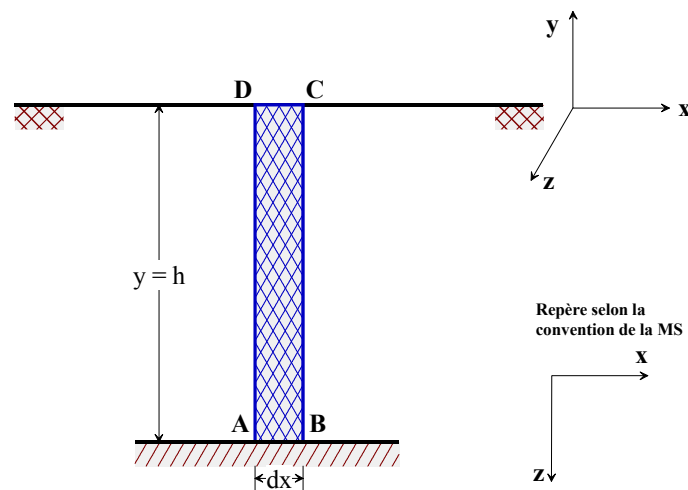


Fig.4.19 Schéma d'une colonne de sol

C'est un problème de déformation plane $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, mais puisque le massif est indéfini, on a également $\frac{\partial}{\partial x} = 0$.

A partir de l'équation (4.19) on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \end{cases}$$

Par raison de symétrie, les cisaillements sont nuls.

$$t_{xy} = t_{yx} = 0,$$

Les contraintes sont donc principales dans les axes x,y,z.

Avec :

$$F_y = \rho g \quad \text{avec le signe de } g \text{ négatif.}$$

$$F_x = 0$$

Il subsiste donc seulement

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = -F_y$$

En mécanique des sols on notera :

$t_{yy} = \sigma_v$: contrainte normale verticale, avec un signe positif pour les compressions

$t_{xx} = \sigma_h$: contrainte normale horizontale, avec un signe positif pour les compressions

$\rho g = \gamma$ avec γ positif dans le sens vertical descendant $-y$ (par exemple $+20\text{kN/m}^3$) qui sont les conventions spécifiques habituelles à la mécanique des sols.

D'où :

$$\frac{\partial \sigma_h}{\partial x} = 0 \quad \sigma_h = f(y) + k_1$$

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial y} = -F_y \quad \sigma_v = \gamma \cdot y + k_2$$

s'il n'y a aucune surcharge sur le massif de sol.

$$\text{Pour } y = 0 \quad \sigma_v = \sigma_h = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_h = f(y) \\ \sigma_v = \gamma \cdot y = \gamma \cdot z \text{ (convention MS)} \end{array} \right.$$

La contrainte verticale est parfaitement définie, par contre σ_h ne l'est pas. On verra que σ_h **dépend de l'histoire géologique du terrain.**

Remarque : on pourrait évidemment établir directement la relation donnant la contrainte verticale en écrivant l'équilibre d'un petit parallélépipède de sol ABCD (Fig.4.19)

Le poids du parallélépipède étant : $h \times dx \times 1 \times \gamma$ et les contraintes de cisaillement verticales étant nulles le long de ABCD, la contrainte σ_v sur la facette : $dx \times 1$ est directement :

$$\sigma_v = \gamma \cdot h$$

En résumé :

Pour un massif de sol indéfini, de poids volumique γ , à surface horizontale et à une profondeur h , les contraintes verticales et horizontales sont principales et définies par :

$$\sigma_v = \gamma h \quad (4.20)$$

$$\sigma_h \text{ dépend de l'histoire géologique} \quad (4.21)$$

On peut étendre ce résultat au cas de plusieurs sols horizontaux (γ_i, h_i) (Fig.4. 20)

$$\sigma_v = \gamma_i \times h_i \quad (\text{sommation sur } i)$$

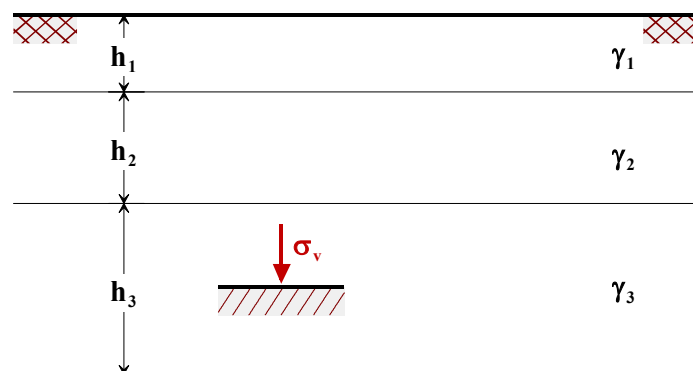


Fig.4.20 Contraintes dans un multicouche

4.2.2 Equations d'équilibre en coordonnées cylindriques. Déformation plane et axisymétrie

Ce cas est fréquemment rencontré dans les problèmes de mécanique des sols : essai triaxial, essai oedométrique, semelle circulaire chargée verticalement uniformément, essai pressiométrique, tuyaux soumis à des pressions uniformes, tunnel circulaire à grande profondeur...

Dans les problèmes **2D** de **déformation plane** pour lesquels $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ on peut travailler directement dans les **coordonnées polaires : r (axe radial), θ (axe orthoradial)**. Il ne subsiste que les 3 composantes des contraintes t_{rr} , $t_{\theta\theta}$ et $t_{r\theta}$ dans les coordonnées polaires et la composante normale t_{zz} par rapport à l'axe **z, direction principale**.

Si le chargement est de révolution on est en condition axisymétrique et on a en plus $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Les directions radiale **r**, et orthoradiale **θ** , sont **principales**.

La contrainte de cisaillement $t_{r\theta}$ est donc nulle et puisque $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ la contrainte orthoradiale $t_{\theta\theta}$ est constante et la contrainte radiale t_{rr} ne dépend que de **r**.

En mécanique des sols , on notera :

$$t_{rr} = \sigma_r$$

$$t_{\theta\theta} = \sigma_\theta$$

$$t_{zz} = \sigma_z$$

On peut écrire immédiatement à partir de la figure 4.21 les 2 équations d'équilibre :

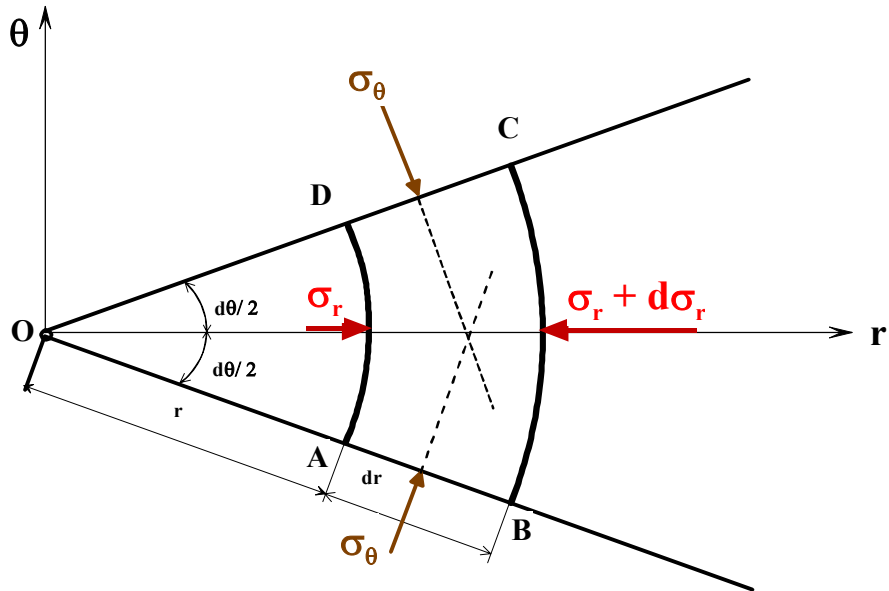


Fig.4.21 Forces élémentaires appliquées au parallélépipède ABCD

Projection sur l'axe radial r

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$$

Projection sur l'axe orthoradial θ

$$\sigma_\theta dr - \sigma_\theta dr = 0$$

Dans un massif de sol dont on néglige le poids propre, dans les hypothèses de déformation plane et de chargement de révolution, pour lequel les directions radiale, orthoradiale et longitudinale sont principales une seule équation d'équilibre subsiste :

$$\boxed{\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (4.22)}$$

4.3 Equations surfaciques

Ce sont les conditions à la limite qui s'expriment en écrivant l'égalité des contraintes au contour.

$$\underline{t} \cdot \underline{n} = \underline{f} \quad (4.23)$$

\underline{f} : vecteur des forces surfaciques extérieures au domaine considéré.

Les forces surfaciques sont dans l'exemple du massif de sol chargé par une semelle filante, le chargement de 200 kPa, mais aussi en dehors de la semelle sur la surface du sol la pression atmosphérique qui est prise comme référence et donc égale à zéro.