

Chapitre 3. Déplacements et déformations dans les sols	2
3.1 Déplacements et déformations d'un massif de sol.....	2
3.2 Déplacements et déformations d'un domaine élémentaire en coordonnées cartésiennes.	5
3.2.1 Etude de la déformation infinitésimale.....	6
3.2.2 Dilatations et directions principales du tenseur de déformations infinitésimales	9
3.2.3 Dilatation cubique en déformations infinitésimales	12
3.2.4 Décomposition du tenseur de déformations infinitésimales en partie sphérique et déviatorique	12
3.3 Déplacements et déformations d'un domaine élémentaire en coordonnées cylindriques	12
3.3.1 Définitions des composantes du déplacement	12
3.3.2 Définitions des composantes du tenseur de déformation en déformation plane et en axisymétrie.....	13

Chapitre 3. Déplacements et déformations dans les sols

3.1 Déplacements et déformations d'un massif de sol

Sous l'action de forces extérieures le massif de sol se déplace, se déforme et subit des contraintes. Comme pour tout problème de génie civil, le géotechnicien doit connaître en tout point du massif de sol, les champs de **déplacements**, de **déformations** et de **contraintes** pour répondre à deux questions fondamentales :

- les **contraintes** dans le sol n'excèdent-elles pas sa résistance?
- les **déplacements** du sol sont-ils compatibles avec l'ouvrage qu'il supporte et son environnement ?

Suivant les ouvrages géotechniques, il faudra apporter une réponse à l'une des questions ou aux deux.

Le sol, dans le cas le plus général, est non saturé. Il est constitué de trois phases : solide (squelette), eau et air. Dans une première approche on considère que le sol est constitué d'une seule phase solide.

Le domaine d'étude est généralement tridimensionnel (**3D**), mais on verra que les ouvrages étudiés ont généralement une dimension très grande par rapport aux deux autres et sont bien représentés par un modèle à 2 dimensions (**2D** : déformation plane, axisymétrie) qui simplifie beaucoup les calculs.

On peut illustrer *l'objectif de ce chapitre* en considérant un massif de sol, homogène et isotrope, horizontal et semi-infini chargé par une semelle filante. On est dans des conditions de **déformation plane**, pour lesquelles le problème est indépendant de la troisième coordonnée, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. On peut donc faire l'étude dans le plan xy et considérer une épaisseur unitaire suivant z (Fig.3.1)



Fig.3.1 Chargement du massif de sol par une semelle filante

Pour étudier le comportement du massif de sol, une simulation a été effectuée sous le logiciel PLAXIS 7.2®.

Le sol a été maillé par des éléments finis triangulaires. La limite inférieure horizontale est bloquée en (x,y) pour tenir compte d'un substratum incompressible à cette profondeur, les limites verticales sont bloquées en x loin de la charge.

Pour des raisons de présentation, il n'a pas été tenu compte dans les calculs de la symétrie du problème (Fig3.2).

La loi de comportement choisie pour cette simulation est la loi élastique linéaire, parfaitement plastique avec critère de plasticité de Mohr-Coulomb. Les lois de comportement seront étudiées dans le chapitre VI.

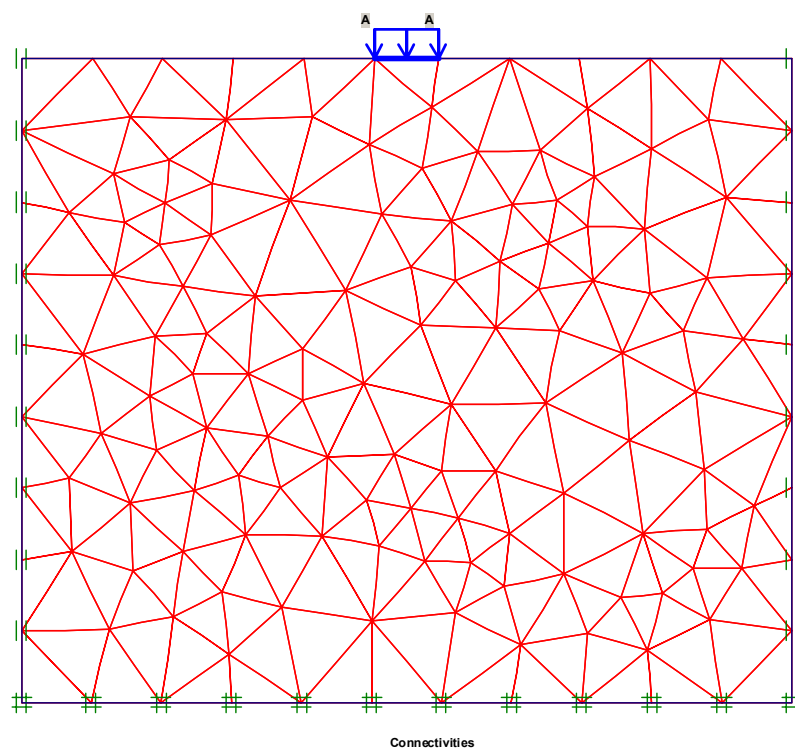


Fig.3.2 Maillage du massif de sol

Sous l'application des forces extérieures, les éléments du massif de sol vont se **déplacer** et se **déformer**. La figure 3.3 montre les déplacements du massif de sol, calculés sous après application de la charge de 200 kPa.

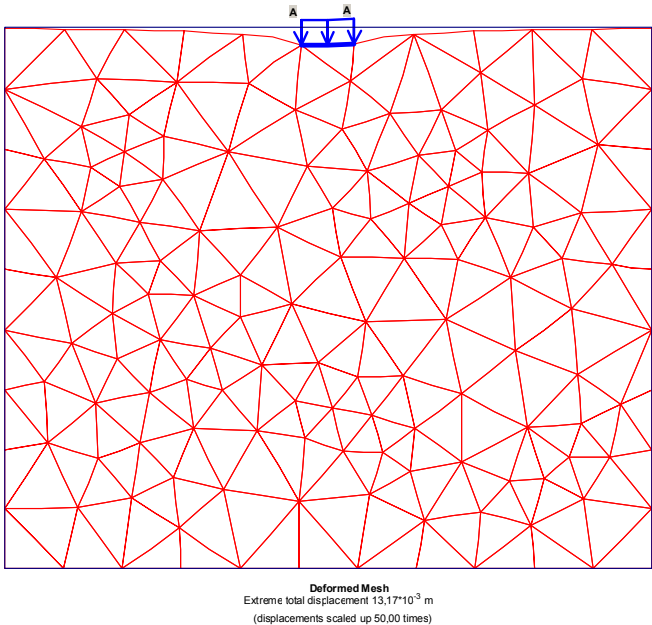


Fig.3.3 Déplacements du massif de sol

En particulier la figure 3.4 donne les déplacements à la surface du sol

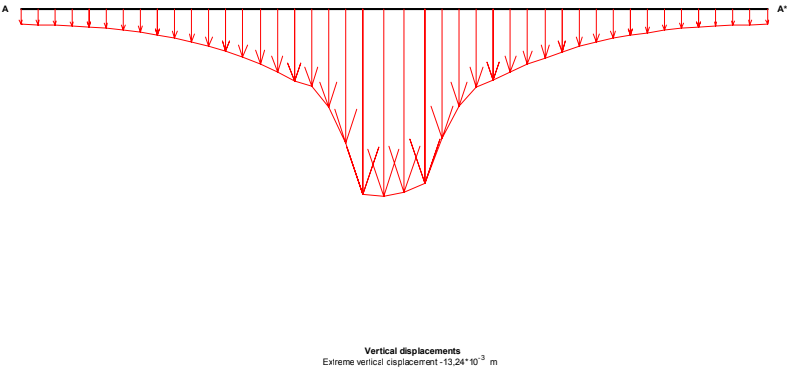


Fig3.4 Déplacements à la surface du sol

Sous les déformations les éléments de sol vont subir des forces de contact internes qu'on nommera *contraintes*.

On va donc étudier deux problèmes : quels sont les *déplacements* et les *déformations* d'un petit *élément de sol* et à quelles *contraintes* est il soumis ?

Puisqu'**on ne sait mesurer que des déplacements**, on va commencer par répondre à la première question.

3.2 Déplacements et déformations d'un domaine élémentaire en coordonnées cartésiennes

A partir de l'exemple du paragraphe précédent, on va formaliser les notions de **déplacement** et de **déformation**.

Dans le **cas général**, chaque élément de **sol** subit un petit **déplacement rigide** (translation et rotation sans déformation) et une petite **déformation** (dilatations et distorsions infinitésimales). C'est la somme du déplacement rigide et de l'intégration des déformations qui donne le déplacement total.

Dans le cas général **3D** le déplacement a 3 composantes de translation et trois composantes de rotation, dans le cas bidimensionnel en déformation plane **2D** il ne reste que 2 composantes de translation suivant les axes horizontaux **u** et verticaux **v** et 1 composante de rotation autour de l'axe **z**.

$$\underline{\delta} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Par exemple le **petit élément** de sol triangulaire 384, 417, 421 s'est déplacé et s'est déformé de sa position initiale en pointillé à la position finale en trait plein (Fig.3.5)

Le point 417 de coordonnées $x = 12,50\text{m}$, $y = 16,60\text{m}$

a subi le déplacement de composantes

$$\mathbf{u} = 0,40\text{mm}$$

$$\mathbf{v} = -7,50\text{mm}$$

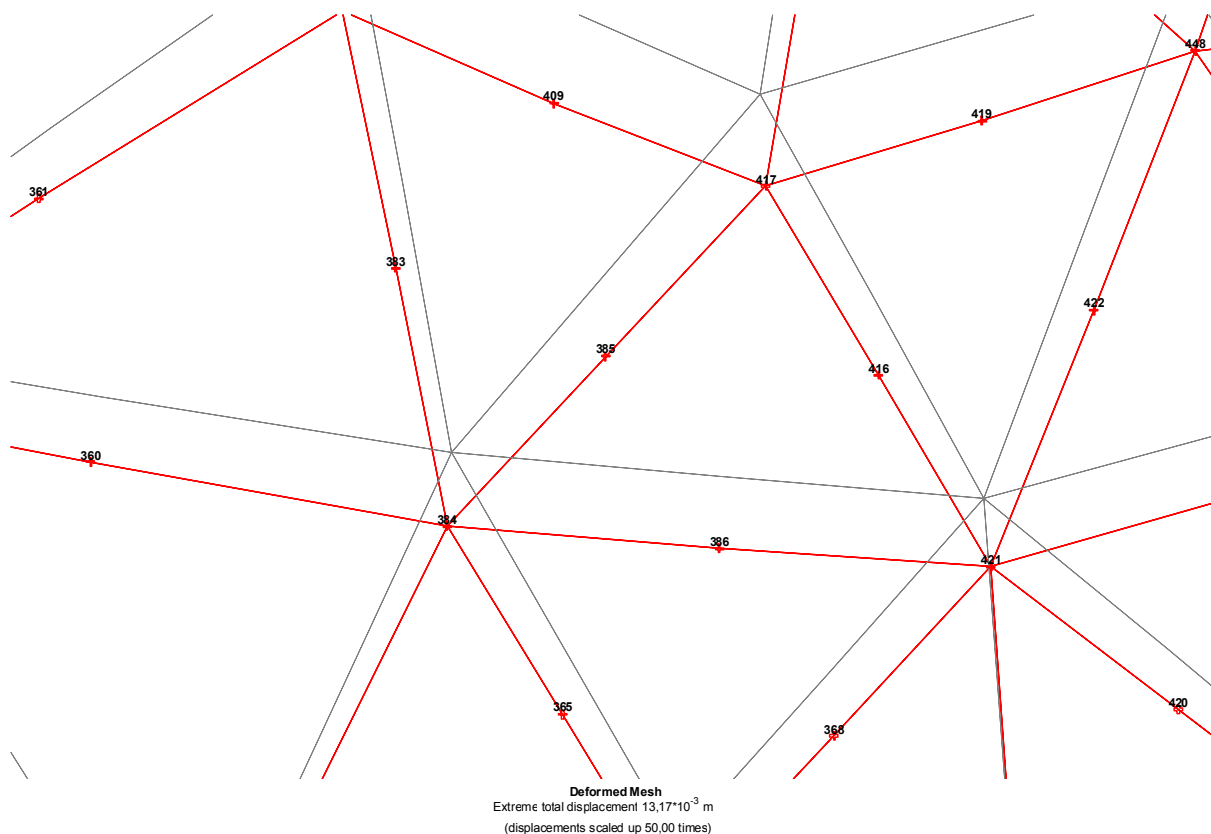


Fig.3.5 Déplacements et déformations des petits éléments de sol

3.2.1 Etude de la déformation infinitésimale

La déformation infinitésimale $\underline{\varepsilon}$, seule fait « travailler le petit élément de sol ».

Dans ce cas, l'élément se déforme : *variation de longueur des côtés, variation de l'angle initialement orthogonal entre les côtés* (Fig.3.6)

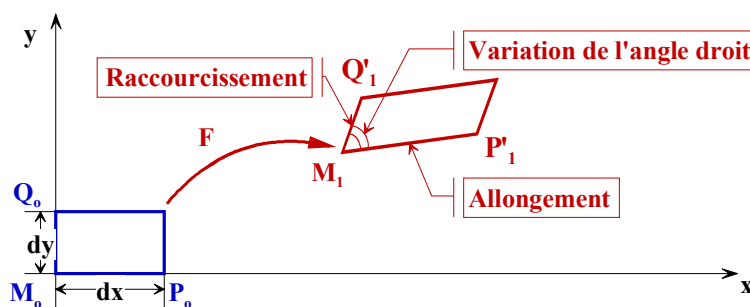


Fig.3.6 Exemple de déplacements et de déformations infinitésimales d'un petit élément

En coordonnées cartésiennes et en déformation plane, dans le plan xy, l'état de déformation infinitésimale est défini par trois composantes :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} sont les composantes du **tenseur de déformation** en un point donné, **M** par exemple.

Les hypothèses de la déformation plane impliquent suivant les composantes z, $\varepsilon_{iz} = 0$.

Dans ces coordonnées la matrice du tenseur complet est représentée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui sera réduit à

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

En coordonnées cartésiennes à 3 dimensions, l'état de déformation infinitésimal est défini par six composantes ; le tenseur étant symétrique $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ quand $i \neq j$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3.2.1.1 Les dilatations en coordonnées cartésiennes

Un élément, infiniment petit, M_1P_1 , qui avait une longueur initiale égale à ds_0 , avant déformation, a une longueur finale $M_1P'_1 = ds$ après déformation (Fig.3.6). La dilatation λ est la variation relative de la longueur de cet élément.

L'allongement en *mécanique des sols* sera noté **négativement** et le **raccourcissement positivement** (c'est le contraire en *mécanique des milieux continus* et dans les *logiciels* de calcul : l'allongement sera positif et le raccourcissement sera négatif).

$$\lambda = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (3.4)$$

➤ Les dilatations sont les termes de la diagonale de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

On montre que les termes de la diagonale de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont les dilatations suivant les axes de coordonnées (Fig.3.7).

$$\lambda_x = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\lambda_y = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

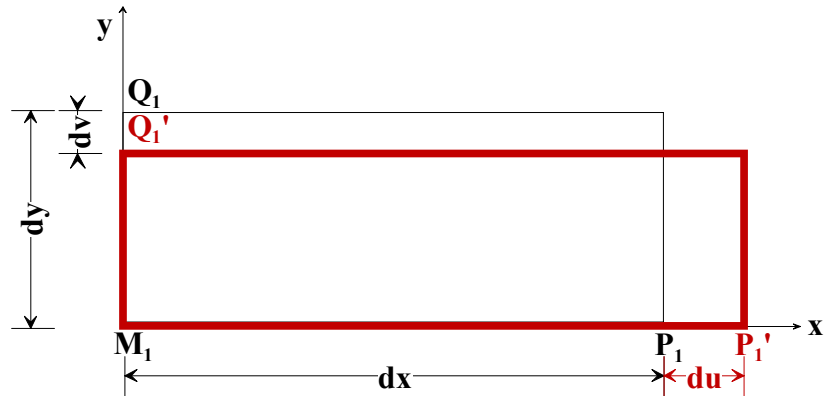


Fig.3.7 Définition des dilatations (déformation sans distorsion)

3.2.1.2 Les glissements en coordonnées cartésiennes

➤ Les glissements sont les termes hors de la diagonale de $(\underline{\underline{\varepsilon}})$

Les 2 éléments M_1P_1 et M_1Q_1 qui étaient orthogonaux avant déformation, ne le sont plus après déformation. La distorsion γ_{xy} est la variation de l'angle droit entre ces deux éléments (Fig.3.8).

On montre que *les termes hors de la diagonale de $(\underline{\underline{\varepsilon}})$ sont la moitié de la distorsion de l'angle droit correspondant i,j qu'on nomme glissement g*

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} \quad (3.6)$$

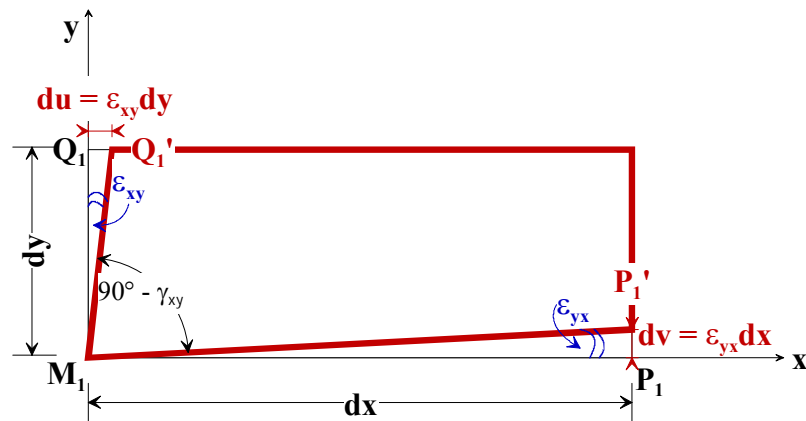


Fig.3.8 Définition de la distorsion (déformation sans dilatation)

Par exemple le petit élément de sol triangulaire 384, 417, 421 s'est déformé (Fig.3.5)

Au point (point de Gauss) de coordonnées $x = 12,44\text{m}$, $y = 16,11\text{m}$ le tenseur de déformation est dans les axes xy .

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 57 & 18 \\ 18 & -105 \end{pmatrix} 10^{-5}$$

On a donc en ce point un allongement relatif suivant x , un raccourcissement relatif suivant y et une distorsion.

3.2.2 Dilatations et directions principales du tenseur de déformations infinitésimales

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ étant un tenseur du second ordre symétrique, il existe une base propre $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ dans laquelle la matrice de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est diagonale. Cette base constitue les **directions principales** de la déformation infinitésimale au point considéré. Les dilatations correspondantes sont les **dilatations principales** : $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$,

Dans le cas de la **déformation plane** $\varepsilon_{iz} = 0$, l'axe z est donc **principal** et $\varepsilon_{zz} = 0$ est **dilatation principale**.

$$(\varepsilon)_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Dans le cas tridimensionnel, on a :

$$(\varepsilon)_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Les directions principales se conservent dans la déformation suivant les directions principales et ne subissent pas de distorsion. L'intérêt de se placer dans les directions principales est de déterminer la plus grande, la plus petite et la valeur intermédiaire des dilatations, qui sont évidemment indépendantes des repères choisis.

Dans une base quelconque les valeurs propres de la matrice symétrique associée sont réelles. Elles s'obtiennent par l'équation en S (déterminant) qui fournit les trois dilatations principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, dans le cas tridimensionnel.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - S & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - S & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - S \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

On classe les dilatations principales suivant $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Comme pour tout opérateur linéaire on a trois invariants caractéristiques de l'opérateur indépendant de la base.

$$(1) \text{ trace de } \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$(2) \text{ déterminant } (\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$(3) \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_3 = \varepsilon_{xx} \times \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy} \times \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx} \times \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2$$

On utilisera très souvent le premier et le second invariant en supposant le milieu étudié isotrope.

On obtient les **trois vecteurs propres**, donnant les directions principales en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

avec i égal à 1, 2 ou 3

Avec, puisque la base est orthonormée :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_3 = \underline{n_1} \wedge \underline{n_2}$$

Dans le cas de **déformation plane**, le tenseur étant réduit à trois composantes, on a :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - S & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - S \end{vmatrix} = 0 \quad \text{avec } \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

$$(\varepsilon_{xx} - S)(\varepsilon_{yy} - S) - (\varepsilon_{xy})^2 = 0$$

qui donne ε_1 et ε_2

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ et $\varepsilon_z = 0$, déformation principale.

(Le classement des déformations principales sera différent suivant la convention de signes adoptée : raccourcissement positif et allongement négatif en mécanique des sols, le contraire en mécanique des milieux continus et dans les logiciels de calcul).

La direction **z** est, par définition de la déformation plane, **principale**, ce peut être dans le cas le plus général **X₁**, **X₂** ou **X₃**.

On calcule les 2 autres directions principales(en supposant ε_z , la mineure, la démonstration restant la même dans le cas contraire)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}n_1 + \varepsilon_{xy}n_2 \\ \varepsilon_{yx}n_1 + \varepsilon_{yy}n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1n_1 \\ \varepsilon_2n_2 \end{pmatrix}$$

Soit, par exemple pour la direction majeure :

$$(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_1)n_1 + \varepsilon_{xy}n_2 = 0$$

D'où n_1 et n_2 et la direction majeure X_1 .

Il n'est pas obligatoire de normer les vecteurs si l'on veut seulement calculer l'angle de rotation.

Puisque l'on connaît la direction principale $n_z = 0$, on obtient directement la troisième direction principale X_2 , dans le plan xy , orthogonale à X_1 .

La figure 3.8 montre les directions principales par rapport aux axes xy pour certains petits éléments du sol, en particulier pour le **petit élément** de sol triangulaire 384, 417, 421. Les traits sans flèche indiquent les directions principales des raccourcissements relatifs et les traits avec flèches les directions principales des allongements relatifs. La longueur des traits sont proportionnelles aux valeurs de ces dilatations.

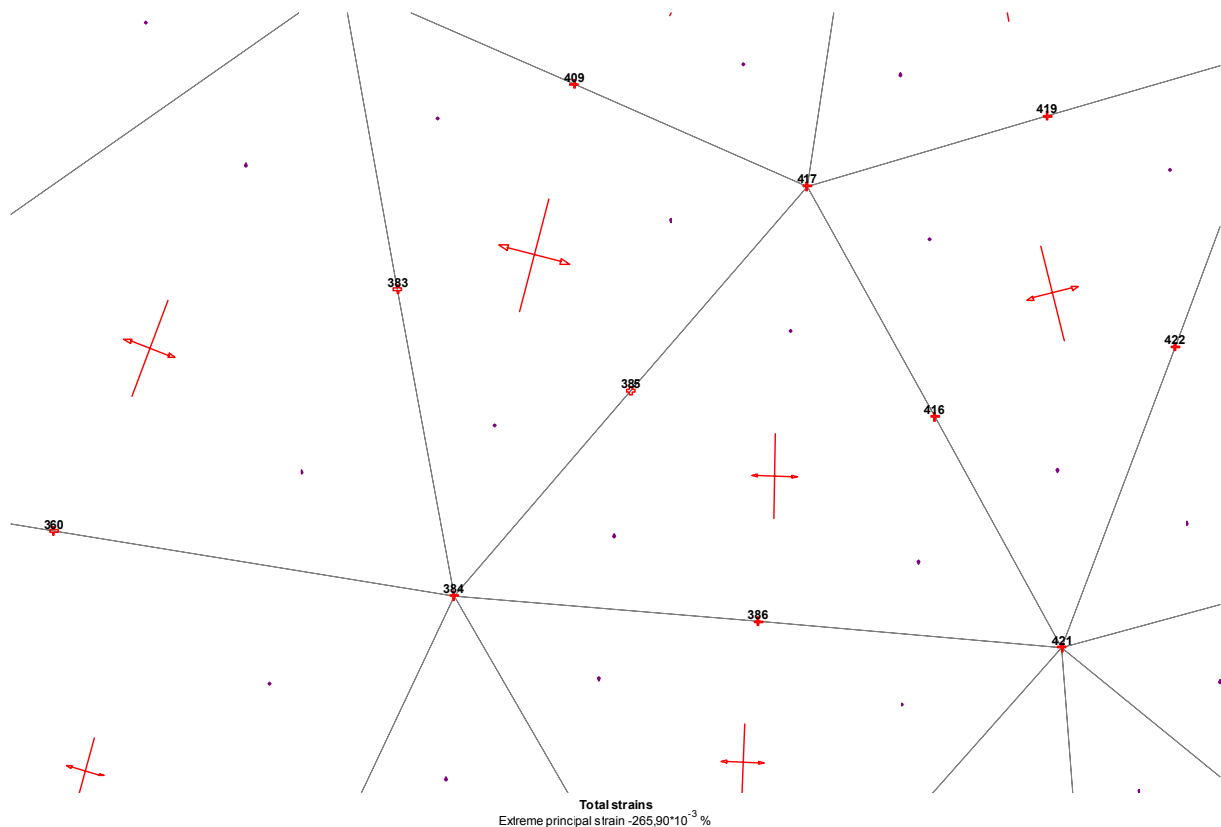


Fig3.8 Directions principales et dilatations principales des déformations infinitésimales

3.2.3 Dilatation cubique en déformations infinitésimales

On la définit par $\Theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$. avec dV_0 le parallélépipède élémentaire, construit sur les trois axes principaux, égal à $dX_1 dX_2 dX_3$. Après déformation infinitésimale $dV = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$.

En négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport au premier ordre on obtient :

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{div} \underline{\underline{\delta}} = 1^{\text{er}} \text{ invariant} \quad (3.11)$$

La variation de volume est évidemment indépendante du système d'axes, on retrouve physiquement que $\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ est un invariant.

3.2.4 Décomposition du tenseur de déformations infinitésimales en partie sphérique et déviatorique

En mécanique des sols, il est intéressant de décomposer le tenseur ($\underline{\underline{\varepsilon}}$) en un tenseur sphérique ($\underline{\underline{\varepsilon}}_s$) et un tenseur déviatorique ($\underline{\underline{\varepsilon}}_d$).

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_s + \underline{\underline{\varepsilon}}_d$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_s = \frac{1}{3}(\Theta)\underline{\underline{1}} \quad \text{avec } \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{matrice unité}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_d = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}(\Theta)\underline{\underline{1}}$$

La trace du tenseur déviatorique est nulle, ce tenseur n'entraîne qu'une variation de forme. Par contre le tenseur sphérique est seul responsable du changement de volume.

3.3 Déplacements et déformations d'un domaine élémentaire en coordonnées cylindriques

3.3.1 Définitions des composantes du déplacement

On utilisera les coordonnées cylindriques dans les cas de **tunnels**, puits, **essai pressiométrique** et dans les problèmes axisymétriques. On ne reprend pas l'ensemble des démonstrations développées aux paragraphes précédents pour les coordonnées cartésiennes mais on indique les principaux résultats.

En un point P du sol défini par ses coordonnées r, θ, z est lié le trièdre mobile $Px'y'z'$ (Fig.3.9). On définit les différents axes suivants :

Axe radial suivant x'

Axe orthoradial y' suivant l'axe perpendiculaire à l'axe radial

Axe longitudinal suivant z'

On définit dans ces axes, les composantes du déplacement $\underline{\underline{\delta}}$ et du tenseur de déformations infinitésimales $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

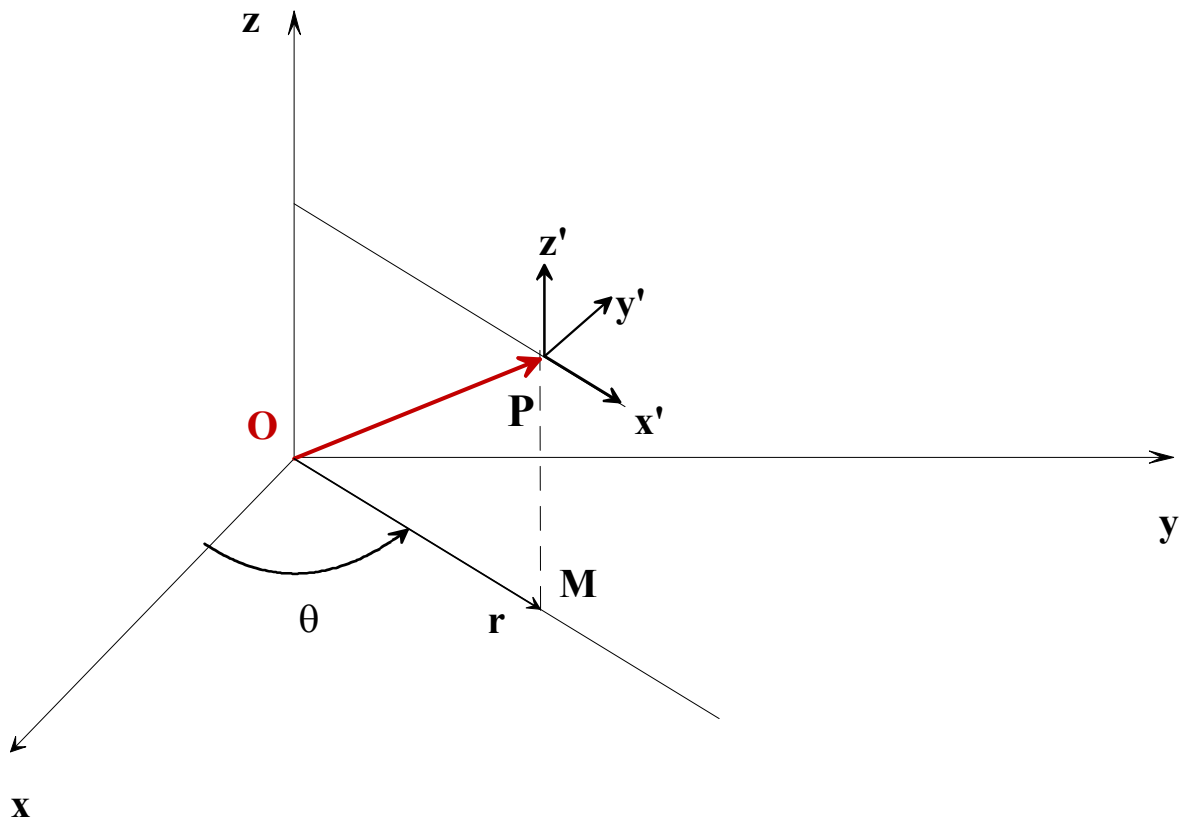


Fig.3.9 Définitions des axes cylindriques

En coordonnées cylindriques, le vecteur déplacement $\underline{\delta}(u, v, w)$ est défini par :

- u** : déplacement radial ;
- v** : déplacement orthoradial ;
- w** : déplacement longitudinal.

On se limitera au cas de déformation plane et axisymétrique, cas par exemple des tunnels profonds à section circulaire, de l'essai pressiométrique, des tuyaux soumis à des pressions uniformes..

3.3.2 Définitions des composantes du tenseur de déformation en déformation plane et en axisymétrie

Dans les problèmes **2D** de **déformation plane** pour lesquels $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ et donc $w = 0$ et $\varepsilon_{iz} = 0$; on peut travailler directement dans les **coordonnées polaires** : **r** (axe radial), θ (axe orthoradial). Il ne subsiste que les 3 composantes ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ et $\varepsilon_{r\theta}$.

En outre, si le chargement est de révolution, cas axisymétrique, il est indépendant de θ et donc $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ (Fig.3.10). Dans ce cas, le déplacement orthoradial v est nul, le déplacement radial u ne dépend que de r . Les déformations sont indépendantes de θ , et ne sont fonction que de r , la distorsion est nulle. Les directions radiale et orthoradiale sont donc directions principales ce qui permet de tracer directement le cercle de Mohr ou les cercles principaux.

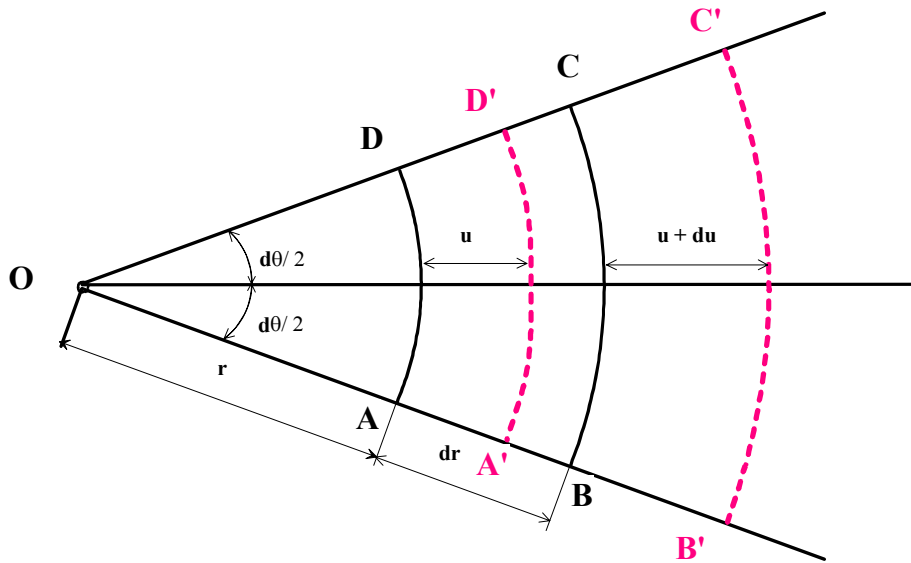


Fig.3.10 Déplacements et déformations sous chargement de révolution

Dilatation radiale

$$\varepsilon_{rr} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{dr + du - dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Dilatation orthoradiale

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{(r + u)d\theta - (r.d\theta)}{r.d\theta} = \frac{u}{r}$$

Dilatation radiale	$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$	(3.12)
Dilatation orthoradiale	$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$	
Distorsion	$2\varepsilon_{r\theta} = 0$	

On aura donc en **déformation plane** et en **axisymétrie**

$$\begin{cases} v = w = 0 \\ \varepsilon_{ij} = 0 & i \neq j \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$